

**DIE MAXIMALZAHL DER UNABHÄNGIGEN
KREISE IN GRAPHEN GEGEBENER
KANTEN- UND KNOTENPUNKTANZAHL**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

1960

vorgelegt von

Fritz Reinhardt

aus Berlin

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

DIE MAXIMALZAHL DER UNABHÄNGIGEN
KREISE IN GRAPHEN GEGEBENER
KANTEN- UND KNOTENPUNKTANZAHL

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Fritz Reinhardt

aus Berlin

1. Gutachter : Prof. Dr. G. Ringel

2. Gutachter : Prof. Dr. K.P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Nov. 1967

Tag der Promotion:

76. Jan. 1968



Inhaltsverzeichnis

Seite

I. PROBLEMSTELLUNG UND ERGEBNISSE 3

Definitionen, S. 3. Unabhängige Kreise, S. 5.
Problemstellung, S. 6. Kantenlose Untergraphen, S. 7. Kreisfremde Knotenpunkte, S. 9.
Hauptsatz über die Existenz von k unabhängigen Kreisen (Satz 1 und 2), S. 10. Verschärfung von Satz 1 (Satz 3), S. 11. Verschärfung von Satz 2 (Satz 4), S. 12. Folgerungen für den Beweis des Hauptsatzes, S. 13. Existenz von zwei unabhängigen Dreiecken (Satz 5), S. 13. Existenz von unabhängigen Kreisen in plättbaren Graphen (Satz 6), S. 14. Existenz von zwei unabhängigen Kreisen in Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(1, r)$ (Satz 7), S. 14. Plättbare Weg-Kreis-Graphen (Satz 8), S. 16.

II. BEWEIS DES HAUPTSATZES DURCH DIE SÄTZE 2, 3
UND 4 18

III. BEWEIS DES SATZES ÜBER DIE EXISTENZ VON
ZWEI UNABHÄNGIGEN DREIECKEN (Satz 5) 37

IV. BEWEISE ZUR EXISTENZ VON UNABHÄNGIGEN
KREISEN IN PLÄTTBAREN GRAPHEN (Satz 6) 39

V. BEWEISE ZUR EXISTENZ VON ZWEI UNABHÄNGI-
GEN KREISEN IN WEG-KREIS-GRAPHEN (Satz 7
und Satz 8) 42

Literaturverzeichnis

Lebenslauf



Digitized by the Internet Archive
in 2026

I. PROBLEMSTELLUNG UND ERGEBNISSE

Definitionen. Ein Graph wird definiert durch eine Menge G von Objekten und eine Relation $\Pi_G \subset G \times G$. Die Elemente von G werden Knotenpunkte genannt und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet; die Elemente von Π_G heißen Kanten. Wenn x und y Knotenpunkte sind und $(x,y) \in \Pi_G$ ist, so sagen wir: x und y sind durch eine Kante verbunden.

In dieser Arbeit werden nur ungerichtete, endliche, schlingen- und zweiecklose Graphen behandelt, d.h. die Kanten erhalten keine Orientierung, die Knotenpunktzahl ist stets endlich, kein Knotenpunkt ist mit sich selbst verbunden, und zwischen je zwei Knotenpunkten existiert höchstens eine Kante.

Mit $G^{(n)}$ soll ein Graph bezeichnet werden, wenn er n (positive ganze Zahl) Knotenpunkte besitzt. Um anzugeben, daß in $G^{(n)}$ eine wohlbestimmte Kantenzahl z (positive ganze Zahl) vorhanden ist, wird z als unterer Index angehängt: $G_z^{(n)}$. So wird z.B. durch $G_{33}^{(12)}$ ein Graph bezeichnet, der 12 Knotenpunkte und 33 Kanten besitzt. Im allgemeinen schreiben wir jedoch für die Kantenzahl eines Graphen G : $z(G)$.

Ein Graph heißt vollständig, wenn zwischen je zwei Knotenpunkten genau eine Kante existiert. Für einen vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten verwenden wir die Bezeichnung $V^{(n)}$. Ein vollständiger Graph $V^{(n)}$ enthält genau $\binom{n}{2}$ Kanten. Da Schlingen und Zweiecke ausgeschlossen sind, kann ein beliebiger Graph $G^{(n)}$ höchstens so viele Kanten wie der vollständige Graph $V^{(n)}$ besitzen. Unter einem Untergraphen eines Graphen $G_z^{(n)}$ verstehen wir jede Teilmenge der Knotenpunktmenge mit

allen Kanten, die zwischen diesen Knotenpunkten in $G_z^{(n)}$ existieren.

Der **Grad** eines Knotenpunktes x ist durch die Anzahl der Kanten definiert, durch die x mit anderen Knotenpunkten verbunden ist. In schlingen- und zweiecklosen Graphen gibt daher der Grad eines Knotenpunktes x die Anzahl der **verschiedenen** Knotenpunkte an, die mit x verbunden sind. Der Grad eines Knotenpunktes ist also in einem Graphen $G^{(n)}$ stets $\leq n-1$.

Sind $x_1, x_2, \dots, x_i$ ($i \geq 2$) paarweise verschiedene Knotenpunkte, und existieren die Kanten $(x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i)$, so wird $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ ein **Weg** der Länge i genannt. Ist außerdem die Kante (x_i, x_1) vorhanden, so liegt ein **Kreis** der Länge i vor. In schlingen- und zweiecklosen Graphen umfaßt jeder Kreis mindestens drei Knotenpunkte. Besteht ein Kreis aus genau drei Knotenpunkten, so sprechen wir von einem **Dreieck**.

Ein Graph $G^{(n)}$ heißt **Baum**, wenn kein Kreis existiert. Die Kantenzahl eines Baumes ist stets $\leq n-1$.

Ein Graph wird **zusammenhängend** genannt, wenn je zwei Knotenpunkte durch einen Weg verbunden sind. Jeder Graph kann auf eindeutige Weise in seine Zusammenhangskomponenten zerlegt werden, d.h. in disjunkte Untergraphen maximaler Knotenpunktzahl.

Ist G ein Graph, so nennen wir den Graphen mit derselben Knotenpunktmenge und genau allen Kanten, die in G nicht enthalten sind, den **Komplementärgraphen** zu G . Er wird mit $\bar{G}$ bezeichnet.

Häufig werden zum Beweis und zur Veranschaulichung Zeichnungen verwendet. Die Darstellung eines Graphen als dreidimensionales Gebilde ist zulässig, weil sie stets in den abstrakten Relationskalkül "übersetzt" werden kann. In den Zeichnungen stellen kleine Kreise die Knotenpunkte, Linien zwischen den Knotenpunkten die Kanten dar. Überschneidungen von Kanten sind dabei unvermeidbar, jedoch stellen derartige "Schnittpunkte" keine Knotenpunkte dar. Bei Fallunterscheidungen verwenden wir oft das symmetri-

sche Verhalten von Knotenpunkten. Knotenpunkte sollen **s y m m e t r i s c h** heißen, wenn sie mit den Mitteln der Graphentheorie nicht zu unterscheiden sind. So können u. U. Anfangs- und Endpunkt eines Weges als symmetrisch angesehen werden, so daß wir uns "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" (o.B.d.A.) auf einen der beiden Knotenpunkte beschränken. - Ein weiteres Beispiel entnehmen wir der Abb. 2. In dem dargestellten Graphen sind die Knotenpunkte vom Grad 3 bzw. die Knotenpunkte vom Grad 5 symmetrisch.

Unabhängige Kreise. Zwei Kreise eines Graphen heißen **u n a b h ä n g i g**, wenn sie keinen Knotenpunkt gemeinsam haben.

Im Graphen $G_{10}^{(6)}$ der Abb. 1 gibt es zwei unabhängige Kreise, z.B. die beiden Dreiecke (x_1, x_4, x_5) und (x_2, x_3, x_6) . Dagegen enthält der in Abb. 2 dargestellte Graph dieselbe Knotenpunktmenge, aber 12 Kanten und keine zwei unabhängigen Kreise (siehe Abschnitt "Kantenlose Untergraphen", Seite 7).

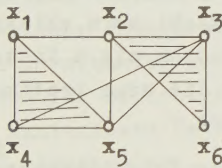


Abb. 1

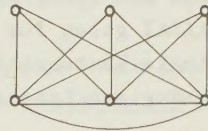


Abb. 2

Eine Menge von Kreisen eines Graphen heißt **unabhängig**, wenn je zwei Kreise keinen Knotenpunkt gemeinsam haben. Sind in einem Graphen k (positive ganze Zahl) unabhängige Kreise vorhanden, so schreiben wir dafür abgekürzt: es gilt $O^{(k)}$. Im Spezialfall von k unabhängigen Dreiecken schreiben wir $\Delta^{(k)}$. Im Graphen der Abb. 1 gilt also $\Delta^{(2)}$, während im Graphen der Abb. 2 nur $O^{(1)}$ gilt.

Problemstellung. Vorgegeben sei ein Graph mit n Knotenpunkten und z Kanten. Dann soll die Maximalzahl der unabhängigen Kreise in diesem Graphen bestimmt werden. Äquivalent zu diesem Problem ist das folgende:

Vorgegeben seien ein Graph mit n Knotenpunkten und eine ganze Zahl $k \geq 1$. Es wird danach gefragt, wieviel Kanten dieser Graph mindestens enthalten muß, damit bei einer beliebigen Anordnung der Kanten stets k unabhängige Kreise existieren.

Fordern wir die Existenz von k unabhängigen Kreisen in einem Graphen, so muß zunächst $n \geq 3k$ gewählt werden, denn bestenfalls sind k unabhängige Dreiecke vorhanden. Alsdann muß die Kantenzahl z bestimmt werden, so daß $O^{(k)}$ für jeden Graphen $G_{z+1}^{(n)}$ gilt und mindestens ein Graph $M_z^{(n)}$ existiert, für den höchstens $O^{(k-1)}$ gilt. Dadurch erhält z minimale n Charakter.

Solche Minimalprobleme der Graphentheorie wurden bereits von verschiedenen Verfassern¹⁾ bearbeitet und z.T. gelöst. Von TURÁN stammt eine Arbeit, in der er eine Antwort auf die Frage gibt, wieviel Kanten ein Graph mit n Knotenpunkten mindestens enthalten muß, damit ein vollständiger Untergraph mit einer Knotenpunktzahl $m \leq n$ existiert. ERDŐS-GALLAI geben für jeden Graphen mit n Knotenpunkten die minimale Kantenzahl an, für die eine bestimmte Anzahl von unabhängigen Kanten existiert.

Allgemeiner können diese Probleme folgendermaßen formuliert werden:²⁾

Gegeben sei eine feste Knotenpunktzahl n . Dann wird die Kantenzahl z gesucht, so daß jeder Graph $G^{(n)}$ mit einer Kantenzahl $\geq z+1$ eine Eigenschaft $E(G)$ besitzt und es mindestens einen Graphen $M^{(n)}$ mit einer Kantenzahl z gibt, der $E(G)$ nicht besitzt. Mit anderen Worten: $z+1$ ist die kleinste Kantenzahl, so daß $E(G)$ gilt.

1) in [4], [5], [6], [7]

2) nach [4]

In dieser Arbeit ist $E(G)$ die Eigenschaft, daß k unabhängige Kreise existieren. Das Minimalproblem wird für beliebige Graphen und Graphen besonderer Struktur gelöst. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem allgemeinen Fall. Zur Begrenzung der minimalen Kantenzahl nach unten können Graphen angegeben werden, für die $O^{(k)}$ nicht gilt. Hierbei sind u.a. sogenannte kantenlose Untergraphen von Bedeutung.

Kantenlose Untergraphen. Ein Graph $G^{(n)}$ besitzt einen kantenlosen Untergraphen mit $m \leq n$ Knotenpunkten, wenn es m Knotenpunkte gibt, die paarweise nicht verbunden sind. Offensichtlich kann ein kantenloser Untergraph mit m Knotenpunkten als der Komplementärgraph eines vollständigen Untergraphen $\bar{V}^{(m)}$ aufgefaßt werden. Wir wollen ihn daher mit $\bar{V}^{(m)}$ bezeichnen. In Abb. 2 bilden die Knotenpunkte vom Grad 3 einen kantenlosen Untergraphen mit drei Knotenpunkten, also einen $\bar{V}^{(3)}$.

Die kantenlosen Untergraphen sind deshalb für unser Problem von Bedeutung, weil sich einfach zeigen läßt, daß $O^{(k)}$ in keinem Graphen $G^{(n)}$ mit $n \geq 3k$ und $k \geq 1$ gilt, wenn ein kantenloser Untergraph hinreichend großer Knotenpunktzahl m vorhanden ist.

Ist nämlich für beliebige $n \geq 3k$ und $k \geq 1$ die Knotenpunktzahl des kantenlosen Untergraphen $\underline{m(n,k)} \geq n-2k+1$, so kann $O^{(k)}$ nicht gelten.

Den Nachweis führen wir indirekt. Nehmen wir an, daß $O^{(k)}$ in einem derartigen Graphen vorhanden wäre, so müßten mindestens $k+1$ Knotenpunkte von $\bar{V}^{(m)}$ in den unabhängigen Kreisen enthalten sein, weil höchstens $2k-1$ Knotenpunkte nicht zu $\bar{V}^{(m)}$ gehören. Da $\bar{V}^{(m)}$ jedoch kantenlos ist, gehören zu jedem, in einem der unabhängigen Kreise vorkommenden Knotenpunkt von $\bar{V}^{(m)}$ mindestens zwei Knotenpunkte außerhalb $\bar{V}^{(m)}$. Also müßte es mindestens $2k+2$ Knotenpunkte außerhalb $\bar{V}^{(m)}$ geben, was nicht der Fall ist.

Der in Abb. 2 dargestellte Graph kann daher keine zwei unabhängigen Dreiecke enthalten, weil ein $\bar{V}^{(3)}$ vorliegt.

Ist in einem Graphen ein kantenloser Untergraph $\nabla^{(m)}$ vorhanden, so sagen wir im folgenden, daß dieser Graph die Eigenschaft $\nabla^{(m)}$ besitzt. Nach den obigen Ausführungen schließt also die Eigenschaft $\nabla^{(m)}$ die Eigenschaft $\mathcal{O}^{(k)}$ aus, wenn $m(n,k) \geq n-2k+1$ ist.

Die minimale Kantenzahl z im Sinne unserer Problemstellung muß daher mindestens so groß sein wie die Maximalzahl der Kanten, die ein Graph mit der Eigenschaft $\nabla^{(m)}$ ($m \geq n-2k+1$) enthalten kann. Offensichtlich können außer den $\binom{m}{2}$ Kanten von $\nabla^{(m)}$ alle Kanten existieren, so daß jeder Graph $G^{(n)}$ mit der Eigenschaft $\nabla^{(m)}$ eine Kantenzahl $\binom{n}{2} - \binom{m}{2}$ besitzen kann. Wegen $m(n,k) \geq n-2k+1$ wird diese Kantenzahl maximal für $m(n,k) = n-2k+1$, d.h. die Maximalzahl von Kanten ist

$$\binom{n}{2} - \binom{n-2k+1}{2} = (2k-1)(n-k) .$$

Für die minimale Kantenzahl z muß daher gelten:

$$z \geq (2k-1)(n-k) .$$

Der Graph $M_z^{(n)}(k)$ maximaler Kantenzahl $z=(2k-1)(n-k)$, der für alle $n \geq 3k$ und $k \geq 1$ einen kantenlosen Untergraphen $\nabla^{(m)}$ mit $m(n,k)=n-2k+1$ enthält und keine k unabhängigen Kreise besitzt, hat die in Abb. 3 wiedergegebene Struktur.¹⁾

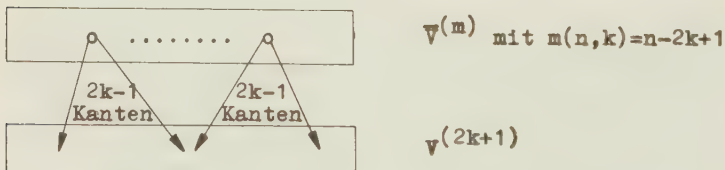


Abb. 3

1) Dieser Graph wird in [6] angegeben.

Durch die Analyse der kantenlosen Untergraphen eines Graphen hat sich eine erste Abschätzung der minimalen Kantenzahl nach unten ergeben. Es muß daher die Frage aufgeworfen werden, ob es Graphen mit größeren Kantenzahlen gibt, die $O^{(k)}$ nicht besitzen. Diese Frage wird mit Hilfe der Anzahl sogenannter kreisfremder Knotenpunkte eines Graphen beantwortet.

Kreisfremde Knotenpunkte. Ein Knotenpunkt eines Graphen heißt *kreisfremd*, wenn er in keinem Kreis enthalten ist.

Wir weisen nach, daß $O^{(k)}$ in keinem Graphen gilt, in dem die Anzahl r kreisfremder Knotenpunkte hinreichend groß ist.

Ist nämlich $\underline{r(n,k) \geq n-3k+1}$, so kann $O^{(k)}$ in keinem Graphen $G^{(n)}$ gelten, denn es gibt höchstens $3k-1$ Knotenpunkte, die überhaupt in Kreisen liegen.

Die Eigenschaft eines Graphen, mindestens $n-3k+1$ kreisfremde Knotenpunkte zu besitzen, schließt also die Eigenschaft $O^{(k)}$ aus.

Wir schätzen die Kantenzahl eines Graphen mit $r(n,k) \geq n-3k+1$ kreisfremden Knotenpunkten nach oben ab. Die r kreisfremden Knotenpunkte seien im Untergraphen G' zusammengefaßt. G'' enthalte die restlichen $n-r$ Knotenpunkte, die jeweils in mindestens einem Kreis von G'' liegen. Dann denken wir uns G' zerlegt in seine i ($1 \leq i \leq r$) zusammenhängenden Komponenten. Da alle Knotenpunkte von G' kreisfremd sind, muß jede Komponente ein Baum sein. Daher enthält G' genau $r-i$ Kanten. Weiterhin ist jede Komponente von G' durch höchstens eine Kante mit G'' verbunden, denn sonst liegen Knotenpunkte einer Komponente in einem Kreis mit Knotenpunkten aus G'' . Da G'' höchstens $\binom{n-r}{2}$ Kanten enthält, ergibt sich als Abschätzung nach oben die Kantenzahl

$$r-1 + i + \binom{n-r}{2} = \binom{n-r-1}{2} + n - 1.$$

Wegen $r(n,k) \geq n-3k+1$ wird diese Kantenzahl maximal für $r(n,k) = n-3k+1$.

Für die minimale Kantenzahl z im Sinne unserer Problemstellung muß daher gelten:

$$z \geq \binom{3k-2}{2} + n - 1$$

Der Graph $M_z^{(n)}(k)$ mit maximaler Kantenzahl $z = \binom{3k-2}{2} + n - 1 = \binom{3k-1}{2} + n - 3k + 1$, der $n - 3k + 1$ kreisfremde Knotenpunkte enthält und k unabhängigen Kreise besitzt, hat die in Abb. 4 dargestellte Struktur.

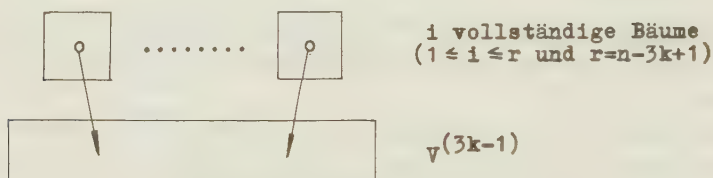


Abb. 4

Fassen wir die Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte zusammen, so gilt für die minimale Kantenzahl z :

$$z \geq \text{Max} \left\{ \binom{3k-2}{2} + n - 1 ; (2k-1)(n-k) \right\}$$

Hauptsatz über die Existenz von k unabhängigen Kreisen.

Es wird gezeigt, daß die oben durchgeführte Abschätzung für die minimale Kantenzahl bereits ausreicht. Wir beweisen den

Hauptsatz:

Jeder Graph $G_{z+1}^{(n)}$ mit $n \geq 3k$, $k \geq 1$ und

$$z = \text{Max} \left\{ \binom{3k-2}{2} + n - 1 ; (2k-1)(n-k) \right\}$$

besitzt k unabhängige Kreise.

Bemerkung: ERDÖS-PÓSA vermuteten in [6], daß für die minimale Kantenzahl

$$z = \text{Max} \left\{ \binom{3k-2}{2} + n ; (2k-1)(n-k) \right\} \text{ gilt.}$$

Tatsächlich kann jedoch die Kantenzahl $\binom{3k-2}{2} + n$ um eine Kante verringert werden.

Eine Untersuchung des Maximums der im Hauptsatz angegebenen Kantenzahlen zeigt, daß $z = (2k-1)(n-k)$ für alle $n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ und $k \geq 1$ ist. Anstelle des Hauptsatzes können wir daher zwei Sätze formulieren:

Satz 1:

Jeder Graph $G_{z+1}^{(n)}$ mit $n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$, $k \geq 1$ und $z = (2k-1)(n-k)$ besitzt $O^{(k)}$.

Satz 2:

Jeder Graph $G_{z+1}^{(n)}$ mit $3k \leq n \leq 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$, $k \geq 4$ und $z = \binom{3k-2}{2} + n - 1$ besitzt $O^{(k)}$.

Verschärfung von Satz 1. Verschärft man die Bedingungen von Satz 1, indem man die Kantenzahl um eine Kante verringert, so läßt sich zeigen, daß der in Abb. 3 dargestellte Graph $M_z^{(n)}(k)$ der einzige Graph ist, der $O^{(k)}$ nicht besitzt ($k=1$ ausgenommen).

Dieses Ergebnis wird auch von ERDÖS-PÓSA erzielt, jedoch mit der gravierenden Einschränkung $n \geq 24k$.

Wir verschärfen Satz 1 ($k=1$, $n=3k$ für $k=2,3$ ausgenommen), indem wir die Kantenzahl um zwei Kanten verringern, und zeigen dann, daß es genau zwei Graphen gibt, die $O^{(k)}$ nicht besitzen. Die Struktur dieser Graphen ist bestimmt durch den Graphen der Abb. 3, jedoch fehlt entweder eine Kante in $V^{(2k+1)}$ oder eine Kante zwischen $V^{(m)}$ und $V^{(2k+1)}$, während alle anderen möglichen Kanten vorhanden sind. Bei

Vorgabe der Kantenzahl sind die beiden Graphen bereits eindeutig durch die Eigenschaft $\nabla^{(m)}$ mit $m(n,k)=n-2k+1$ bestimmt. Wir beweisen den

Satz 3:

Jeder Graph $G_{z-1}^{(n)}$ mit $z=(2k-1)(n-k)$ und $n \geq 3k+1$ für $k=2,3$, $n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ für $k \geq 4$ besitzt entweder $\Delta^{(k)}$ oder $\nabla^{(m)}$ mit $m(n,k)=n-2k+1$.

Bemerkungen:

1. Für $k=1$ ist eine Verschärfung der in Satz 3 durchgeführten Art nicht möglich, denn ein Graph, der keinen Kreis besitzt, ist ein Baum.
2. Die Fälle $n=3k$ für $k=2,3$ werden in Satz 4 berücksichtigt, weil außer den beiden Graphen von Satz 3 noch zwei weitere Graphen existieren, die $\Delta^{(2)}$ bzw. $\Delta^{(3)}$ nicht besitzen.

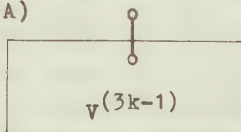
Verschärfung von Satz 2. Eine Reduzierung der Kantenzahl in Satz 2 und die Formulierung des Satzes als Alternativaussage ist nur für $n=3k$ sinnvoll. Die Struktur der Graphen, die für $n \geq 3k+1$ keine k unabhängigen Kreise enthalten, ist nicht eindeutig festgelegt.

Für $n=3k$ und $k \geq 2$ beweisen wir folgenden Satz 4, in dem die Kantenzahl von Satz 2 um eine Kante reduziert wird.

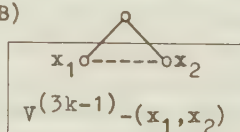
Satz 4:

Jeder Graph $G_z^{(n)}$ mit $z = \binom{3k-2}{2} + n - 1$, $n=3k$ und $k \geq 2$ besitzt entweder $\Delta^{(k)}$ oder $\nabla^{(k+1)}$, oder der Graph ist von folgender Struktur:

(A)



(B)



(ein $\nabla^{(k+1)}$ ist nur für $k=2,3,4$ möglich!)

Folgerungen für den Beweis des Hauptsatzes.

1. Aus Satz 3 und den Fällen $n=3k$ für $k=2,3$ von Satz 4 ergibt sich als Folgerung das Ergebnis von ERDÖS-PÓSA, das allerdings hier für alle Fälle von n , für die die Aussage überhaupt möglich ist, bewiesen wird.
Erhöhen wir nämlich die Kantenzahl in Satz 3 und 4 um eine Kante, so ist der Graph $M_z^{(n)}(k)$ der Abb. 3 der einzige Graph, der $O^{(k)}$ nicht besitzt; die Graphen vom Typ (A) und (B) aus Satz 4 sind nicht mehr möglich!
2. Erhöhen wir die Kantenzahl in Satz 3 und 4 um zwei Kanten, so liegt die Kantenzahl von Satz 1 vor. Sämtliche Alternativgraphen, die $O^{(k)}$ nicht besitzen, sind nicht mehr möglich. Aus Satz 3 und Satz 4 folgt also unmittelbar der Satz 1 für $k \geq 2$.
Für $k=1$ ist Satz 1 ohnehin trivial, denn jeder Graph $G_n^{(n)}$ enthält einen Kreis, da der Graph wegen der Kantenzahl n kein Baum sein kann.
Der Hauptsatz ergibt sich also aus den Sätzen 2, 3 und 4. Beim Beweis verwenden wir folgenden Satz von CORRÁDI-HAJNAL:¹⁾

Ist in einem Graphen $G^{(n)}$ mit $n \geq 3k$ und $k \geq 1$ jeder Knotenpunkt vom Grad $\geq 2k$, so gilt $O^{(k)}$.

Existenz von zwei unabhängigen Dreiecken. ERDÖS beweist, daß jeder Graph $G_z^{(n)}$ mit $n \geq 8$ und $z = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ zwei unabhängige Dreiecke besitzt.²⁾ Weitere Ergebnisse von DIRAC, in [3], erlauben es, den Satz auch für ungerade n auszusprechen:

Satz 5: Jeder Graph $G_z^{(n)}$ mit $n \geq 7$ und $z = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor$ besitzt $\Delta^{(2)}$.

Durch Gegenbeispiele wird belegt, daß sich Satz 5 nicht verschärfen läßt.

1) Der Satz wird in [1] bewiesen.
2) siehe [3]

Existenz von unabhängigen Kreisen in plättbaren Graphen.

Ein Graph heißt *p l ä t t b a r*, wenn seine Kanten ohne Überschneidungen in einer Ebene gezeichnet werden können. Der Graph der Abb. 1 (Seite 5) ist plättbar, denn die Kanten (x_3, x_4) und (x_3, x_5) können auch ohne Überschneidungen gezeichnet werden. Dagegen ist der Graph der Abb. 2 (Seite 5) nicht plättbar.

Zur Existenz von zwei unabhängigen Kreisen in plättbaren Graphen beweisen wir folgenden Satz:

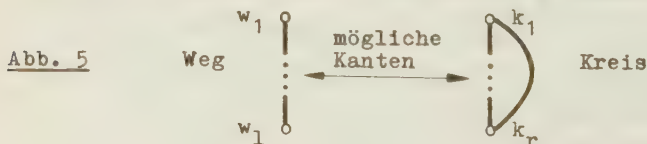
Satz 6: Jeder plättbare Graph $G_z^{(n)}$ mit $n \geq 6$ und $z=2n$ besitzt $O^{(2)}$.

Eine entsprechende Aussage über die Existenz von $O^{(3)}$ ist in plättbaren Graphen bereits nicht mehr möglich. In jedem plättbaren Graphen $G^{(n)}$ ist die Kantenzahl $z(G) \leq 3n-6$, und wir geben einen Graphen mit der Kantenzahl $3n-6$ an, der $O^{(3)}$ nicht besitzt.

Existenz von zwei unabhängigen Kreisen in Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl (l, r) . Ein Graph mit n Knotenpunkten und mindestens $n-1$ Kanten heißt Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl (l, r) , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es existiert ein Kreis der Länge $r \geq 3$.
- (2) Die restlichen $n-r$ Knotenpunkte bilden einen Weg der Länge $l=n-r \geq 2$.
- (3) Außer den $n-1$ Kanten des Weges und des Kreises existieren höchstens weitere Kanten zwischen Wegpunkten und Kreispunkten.

Die Struktur dieses Graphen ist in Abb. 5 dargestellt.



Für Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl (l, r) kann die Frage aufgeworfen werden, wieviel Kanten der Graph mindestens enthalten muß, damit zwei unabhängige Kreise existieren. Es kommt bei diesem Problem offensichtlich nur darauf an, die Anzahl von Kanten zwischen Weg und Kreis zu bestimmen, die die Existenz von $O^{(2)}$ sichert.

Die Anzahl der Kanten zwischen Weg und Kreis wird im folgenden stets mit Z bezeichnet. Zu einer Abschätzung von Z nach unten sollen die drei Graphen der Abb. 6 betrachtet werden.

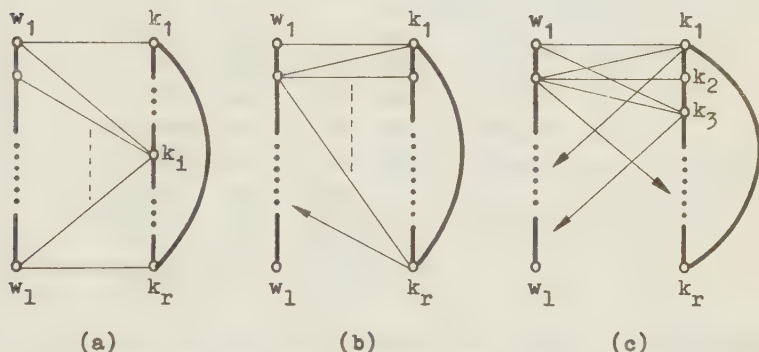


Abb. 6

Die angeführten Graphen besitzen keine zwei unabhängigen Kreise. Bezeichnen wir - Abb. 6/(a), (b), (c) entsprechend - die Kantenzahlen zwischen Weg und Kreis mit Z_a , Z_b und Z_c , so muß für die Kantenzahl Z , bei der $O^{(2)}$ existiert, gelten:

$$Z \geq \text{Max} \{ Z_a + 1 ; Z_b + 1 ; Z_c + 1 \} .$$

Wir beweisen für alle Knotenpunktzahlen $n = l + r \geq 6$ mit $l \geq 2$ und $r \geq 3$, daß

$$Z = \text{Max} \{ Z_a + 1 ; Z_b + 1 ; Z_c + 1 \} \text{ ist.}$$

Aus den Graphen der Abb. 6 lassen sich für Z_a , Z_b und Z_c

folgende Werte ablesen:

$$Z_a = l+2 ; Z_b = \begin{cases} r+1 & \text{für } l=2 \\ r+2 & \text{für } l \geq 3 \end{cases} ; Z_c = 6, 7 \text{ oder } 8 \text{ (je nach Wahl von } l \text{ und } r)$$

Eine Untersuchung hinsichtlich des Maximums der Kantenzahlen Z_a , Z_b und Z_c ergibt folgenden, dem Beweis zugänglicheren Satz:

Satz 7:

$G^{(n)}$ sei ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl (l, r) mit $l \geq 2$, $r \geq 3$ und $n = l+r \geq 6$. Z sei die Kantenzahl zwischen Weg und Kreis. Dann gilt $O^{(2)}$, wenn

- | | | | | | |
|-----|--|-----|---|-----|--|
| (1) | $Z = \begin{cases} r+3 \\ r+2 \end{cases}$ | für | $r=4$ | und | $l=2$ |
| | | für | $r \geq 5$ | und | $l=2$ |
| (2) | $Z=r+5$ | für | $r=3, 4$ | und | $3 \leq l \leq r+2$ |
| (3) | $Z=r+4$ | für | $r=5$ | und | $3 \leq l \leq r+1$ |
| (4) | $Z=r+3$ | für | $r \geq 6$ | und | $3 \leq l \leq r$ |
| (5) | $Z=l+3$ | für | $\begin{cases} r=3, 4 \\ r=5 \\ r \geq 6 \end{cases}$ | und | $\begin{cases} l \geq r+2 \\ l \geq r+1 \\ l \geq r \end{cases}$ |

Bemerkung:

Anregung zur Untersuchung von Weg-Kreis-Graphen gab die Arbeit von CORRÁDI-HAJNAL, [1], in der Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(1, 3)$ und $(1, 4)$ betrachtet werden. Satz 7 verschärft die Ergebnisse von CORRÁDI-HAJNAL hinsichtlich der Kantenzahl zwischen Weg und Kreis.

Plättbare Weg-Kreis-Graphen. Die in Abb. 6 (Seite 15) dargestellten Graphen (a) und (b) sind plättbar. Daher ist Satz 7 auch für plättbare Weg-Kreis-Graphen in allen Fällen von l und r richtig, für die die Kantenzahlen Z_a+1 und Z_b+1 gelten. Da der Graph (c) der Abb. 6 nicht plättbar ist, liegt die Vermutung nahe, daß für plättbare Weg-Kreis-Graphen

$$Z = \text{Max} \{ Z_a+1 ; Z_b+1 \} \quad \text{ist.}$$

In Satz 8 wird bewiesen, daß dies mit Ausnahme des Falles $l=3, r=3$ richtig ist.

Satz 8:

$G^{(n)}$ sei ein plättbarer Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl (l,r) mit $l \geq 2, r \geq 3$ und $n=l+r \geq 6$. Z sei die Kantenzahl zwischen Weg und Kreis. Dann gilt $O^{(2)}$, wenn

$$(1) \quad Z=r+2 \quad \text{für} \quad r \geq 4 \quad \text{und} \quad l=2$$

$$(2) \quad Z = \begin{cases} r+4 \\ r+3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{für} \quad r=3 \\ \text{für} \quad r \geq 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{und} \quad l=3 \\ \text{und} \quad 3 \leq l < r \end{array}$$

$$(3) \quad Z=l+3 \quad \text{für} \quad \begin{cases} r=3 \\ r \geq 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{und} \quad l \geq 4 \\ \text{und} \quad l \geq r \end{array}$$

II. Beweis des Hauptsatzes durch die Sätze 2, 3 und 4

Wie bereits auf Seite 13 angedeutet wurde, ergibt sich der Hauptsatz als Folgerung aus den Sätzen 2, 3 und 4. Zur Vereinfachung sollen die charakteristischen Kantenzahlen $(2k-1)(n-k)$ und $\binom{3k-2}{2} + n - 1$ durch folgende Abkürzungen ersetzt werden:

$$f(n,k) = (2k-1)(n-k) \quad ; \quad l(n,k) = \binom{3k-2}{2} + n - 1$$

Es muß zunächst nachgewiesen werden, daß die Aufteilung des Hauptsatzes in die Sätze 1 und 2 richtig ist, d.h. wir müssen $z = \text{Max} \{ f(n,k) , l(n,k) \}$ untersuchen.

1. Untersuchung von $f(n,k)$ und $l(n,k)$ hinsichtlich des Maximums

- (a) $k=1$. In diesem Fall ist $f(n,1)=n-1$ und $l(n,1)=n-1$, d.h. wir können $z=f(n,1)$ für alle $n \geq 3$ setzen.
- (b) $k \geq 2$. Wir untersuchen bei festem $k \geq 2$, für welche $n \geq 3k$ das Maximum durch $l(n,k)$ angegeben wird. Durch äquivalentes Umformen der Ungleichung $f(n,k) \leq l(n,k)$ ergibt sich

$$n(2k-2) \leq \frac{1}{2}(3k-2)(3k-3) + k(2k-1) ,$$

und weiter
$$n \leq 3k - 1 + \frac{k}{4} .$$

Da n und k positive ganze Zahlen sind, gilt die Ungleichung $f(n,k) \leq l(n,k)$ genau dann, wenn

$$n \leq 3k - 1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil \quad \text{für } k \geq 2 \quad \text{ist.}$$

Aus dieser Untersuchung kann gefolgert werden:

$$z = f(n, k) \quad \text{für alle } n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil \quad \text{mit } k \geq 1,$$

$$z = l(n, k) \quad \text{für alle } 3k \leq n \leq 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil \quad \text{mit } k \geq 4.$$

Zusatz: Die Untersuchung hinsichtlich des Maximums liefert für $k \geq 4$ folgendes zusätzliches Ergebnis, das an anderer Stelle noch benötigt wird:

$l(n, k) = f(n, k)$ gilt genau dann, wenn

$n = 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ und $k = 4m$ ($m=1, 2, \dots$) ist.

Da für diese Fälle von n und k eine Verschärfung im Sinne von Satz 3 nicht möglich ist, werden sie in Satz 2 behandelt.

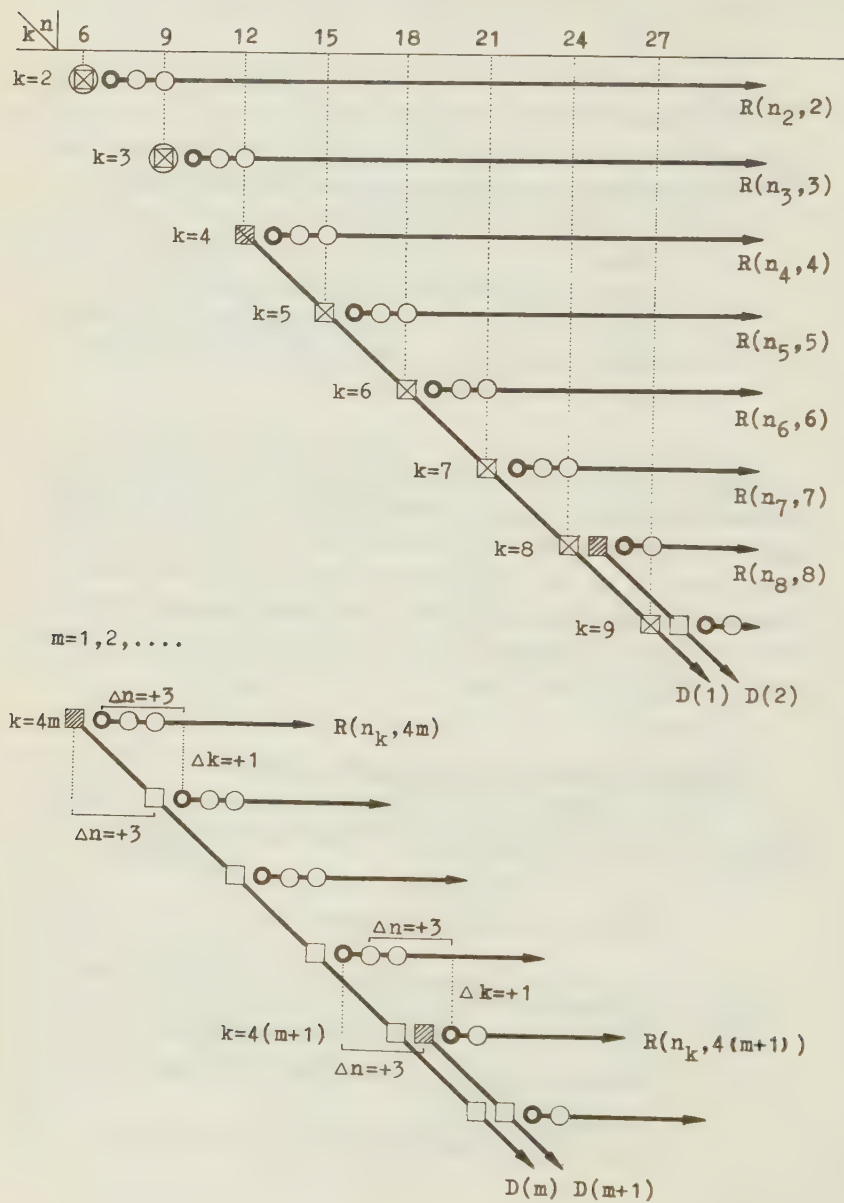
In dem folgenden Beweisverfahren für die Sätze 2 und 3 werden die Sätze nicht einzeln bewiesen, sondern miteinander verknüpft. Auf diese Weise wird ein Induktionsbeweis ermöglicht, der beide Sätze erfaßt. Um den Beweis durchsichtiger zu machen, soll der Beweisgang zunächst in einem Schema dargestellt werden. Daran schließt sich dann der endgültige Beweis an.

2. Das Beweisschema für die Sätze 2 und 3

Satz 2: Jeder Graph $G_{z+1}^{(n)}$ mit $3k \leq n \leq 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$, $k \geq 4$ und $z = \binom{3k-2}{2} + n-1$ besitzt $O^{(k)}$.

Satz 3: Jeder Graph $G_{z-1}^{(n)}$ mit $z = (2k-1)(n-k)$ und $n \geq 3k+1$ für $k=2, 3$, $n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ für $k \geq 4$ besitzt entweder $O^{(k)}$ oder $V^{(m)}$ mit $m(n, k) = n - 2k + 1$.

Beweisschema



Das auf Seite 20 abgebildete Schema soll verdeutlichen, für welche Fälle von n und k Satz 2, Satz 3 und Satz 4 ausgesprochen werden.

Die Fälle von Satz 2 sind durch $\square$ bezeichnet, die von Satz 3 durch $\circ$. Die Fälle $n=3k$ mit $k \geq 2$ des Satzes 4 sind durch $\boxtimes$ gekennzeichnet; dabei sind die beiden Fälle für $k=2,3$ besonders durch $\otimes$ hervorgehoben, weil hier dieselbe Kantenzahl wie in Satz 3 zugrunde liegt.

Die Gesamtheit aller Fälle von Satz 3 unterteilen wir in sogenannte Reihen. Zu jedem festen $k \geq 2$ definieren wir eine Reihe $R(n_k, k)$, in der alle Graphen mit $n_k \geq 3k+1$ für $k=2,3$ und $n_k \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ für $k \geq 4$ zusammengefaßt werden. Der Anfangsfall jeder Reihe ist im Schema durch $\bullet$ hervorgehoben.

Die Fälle von Satz 2 erfassen wir durch sogenannte Diagonalen. Alle Fälle $n=3k$ mit $k \geq 4$ bilden die Diagonale $D(1)$, die Fälle $n=3k+1$ mit $k \geq 8$ bilden die Diagonale $D(2)$ usw. Eine Diagonale $D(m)$ mit $m=1,2,\dots$ enthält alle Fälle $n=3k-1+m$ mit $k \geq 4m$.

Der Anfangsfall jeder Diagonalen ist durch $\boxdot$ gekennzeichnet.

In einem Hilfssatz (I) zeigen wir, daß sich der Beweis von Satz 3 auf die Anfangsfälle jeder Reihe reduzieren läßt. Gilt nämlich Satz 3 für einen beliebigen Fall einer Reihe $R(n_k, k)$, so wird bewiesen, daß Satz 3 auch für den folgenden Fall derselben Reihe gilt. Schematisch:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} .$$

Daraus ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Longrightarrow R(n_k, k) .$$

Wir nennen zwei Fälle des Schemas diagonal-benachbart, wenn $\Delta n = +3$ und $\Delta k = +1$ ist. Aufeinanderfolgende Fälle einer Diagonalen sind demnach diagonal-benachbart.

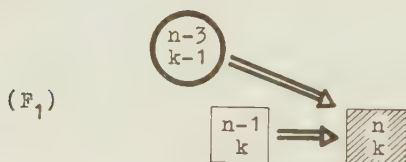
Für den Anfangsfall einer Diagonalen ist der Anfangsfall der vorangehenden Reihe diagonal-benachbart. Desgleichen besitzen auch alle Anfangsfälle der Reihen diagonal-benachbarte Fälle. Mit Ausnahme der Anfangsfälle zu $k=4m$ ist der diagonal-benachbarte Fall stets der Anfangsfall der vorangegangenen Reihe. Für $k=4m$ ist der auf den Anfangsfall der vorangegangenen Reihe folgende Fall diagonal-benachbart.

Ein Fall des Schemas heißt **l i n k s - benachbart** zu einem anderen Fall, wenn $\Delta n = +1$ und $\Delta k = 0$ ist.

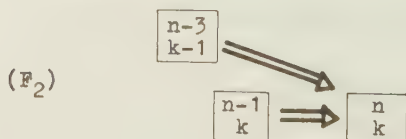
Zu jedem Fall der Diagonalen $D(2), D(3), \dots$ und jedem Anfangsfall der Reihen $R(n_2, 2), R(n_3, 3), \dots$ existiert genau ein diagonal-benachbarter und genau ein links-benachbarter Fall.

Sei nun ein beliebiger Fall einer Diagonalen $D(m)$ mit $m \geq 2$ oder ein beliebiger Anfangsfall einer Reihe $R(n_k, k)$ mit $k \geq 4$ vorgegeben. Dann wird in einem Hilfssatz (II) bewiesen, daß dieser Fall stets aus seinem diagonal-benachbarten und seinem links-benachbarten Fall gefolgert werden kann.

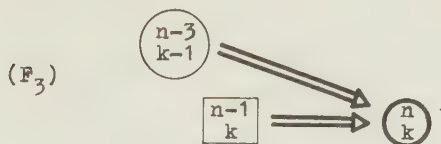
- (1) Der vorgegebene Fall sei Anfangsfall einer Diagonalen. Dann lautet die Aussage des Hilfssatzes (II) schematisch:



- (2) Der vorgegebene Fall sei ein Diagonalfall, aber kein Anfangsfall. Dann lautet die Aussage des Hilfssatzes (II) schematisch:



- (3) Der vorgegebene Fall sei Anfangsfall einer Reihe. Dann lautet die Aussage des Hilfssatzes (II) schematisch:



Beweisen wir nun noch die Fälle $n=3k$ für $k=2,3$ und die Fälle der Diagonalen $D(1)$ - das geschieht in Satz 4 - und die Anfangsfälle der Reihen $R(n_2,2)$ und $R(n_3,3)$, so ist auf Grund der Hilfssätze (I) und (II) ein vollständiger Beweis von Satz 2 und Satz 3 möglich.

Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:

Da Satz 3 für den Anfangsfall der Reihe $R(n_3,3)$ gilt, garantiert der Hilfssatz (I) den Satz für die ganze Reihe. Durch viermaliges Anwenden von (F_3) ergibt sich Satz 3 für die Anfangsfälle der Reihen $R(n_4,4), \dots, R(n_7,7)$.

Wir zeigen nun: Gilt Satz 2 für die Diagonale $D(m)$ mit $m \geq 1$ und Satz 3 für die Anfangsfälle der Reihen $R(n_k, 4m), \dots, R(n_k, 4m+3)$, so gilt Satz 2 für die Diagonale $D(m+1)$ und Satz 3 für die Reihen $R(n_k, 4(m+1)), \dots, R(n_k, 4(m+1)+3)$ (der Induktionsanfang $m=1$ ist gesichert!).

Der Anfangsfall der Diagonalen $D(m+1)$ wird aus (F_1) gefolgert. Die übrigen Diagonalfälle ergeben sich nach (F_2) . Damit gilt Satz 2 bereits für die ganze Diagonale $D(m+1)$.

Da Satz 3 für den Anfangsfall der Reihe $R(n_k, 4m+3)$ richtig ist, garantiert Hilfssatz (I) den Satz für die ganze Reihe. Dann kann Satz 3 durch viermaliges Anwenden von (F_3) auch für die Anfangsfälle der Reihen $R(n_k, 4(m+1)), \dots, R(n_k, 4(m+1)+3)$ gefolgert werden.

Damit gilt Satz 2 für alle Diagonalfälle, Satz 3 für alle Reihenanfangsfälle und - nach Hilfssatz (I) - auch für alle Reihen.

3. Beweis zu Hilfssatz (I)

(I) Gilt für jeden Graphen $G_{f(n,k)-1}^{(n)}$ mit festem $n \geq n_0(k) \geq 3k$ und festem $k \geq 2$ entweder $O^{(k)}$ oder $\nabla^{(m)}$ mit $m(n,k)=n-2k+1$, so gilt für jeden Graphen $G_{f(n+1,k)-1}^{(n+1)}$ entweder $O^{(k)}$ oder $\nabla^{(m+1)}$.

$$f(n,k) = (2k-1)(n-k)$$

Beweis:

Mit $G_{f(n+1,k)-1}^{(n)}$ sei ein beliebiger Graph vorgegeben. Auf Grund des Satzes von CORRÁDI-HAJNAL (Seite 13) kann angenommen werden, daß ein Knotenpunkt x_0 vom Grad $\leq 2k-1$ vorhanden ist, denn sonst gilt $O^{(k)}$ bereits.

Wir betrachten den Graphen $G' = G - x_0$ mit der Knotenpunktzahl n und der Kantenanzahl

$$z(G') \geq z(G) - (2k-1) = (2k-1)(n+1-k) - 1 - (2k-1) = \dots$$

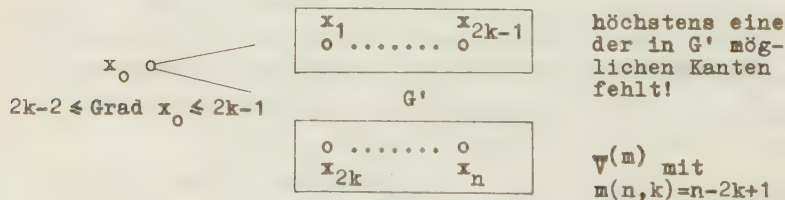
Daher ist $z(G') \geq (2k-1)(n-k) - 1 = f(n,k) - 1$,

d.h. G' genügt den Voraussetzungen von Hilfssatz (I).

In G' gilt also entweder $O^{(k)}$ oder $\nabla^{(m)}$ mit $m=n-2k+1$.

Besitzt G' die Eigenschaft $O^{(k)}$, so selbstverständlich auch $G_{f(n+1,k)-1}^{(n+1)}$. Wir nehmen nun an, daß $\nabla^{(m)}$ in G' gelte. Dann muß aber $\text{Grad } x_0 \geq 2k-2$ sein, weil sonst $z(G') \geq f(n+1,k) - 1 - (2k-3) = (2k-1)(n-k) + 1$ wäre und $\nabla^{(m)}$ in G' nicht gelten könnte (Abschätzung Seite 8).

Wir müssen also folgenden Graphen untersuchen:

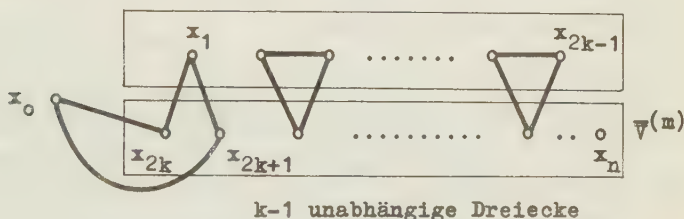


1) analog zu [6]

(a) x_0 sei mit keinem der Knotenpunkte von $\nabla^{(m)}$ verbunden. Dann gilt $\nabla^{(m+1)}$ in $G_{f(n+1,k)-1}^{(n+1)}$.

(b) x_0 sei nur mit Knotenpunkten von $\nabla^{(m)}$ verbunden.

(b₁) Sei $\text{Grad } x_0 = 2k-2$. Dann ist $z(G') = f(n+1,k)-1-(2k-2) = f(n,k)$, d.h. in G' fehlt keine der möglichen Kanten. Wegen $k \geq 2$ ist x_0 mit mindestens zwei Knotenpunkten von $\nabla^{(m)}$ verbunden - o.B.d.A. mit x_{2k} und x_{2k+1} . Also gilt $O^{(k)}$ in G :



(b₂) Sei $\text{Grad } x_0 = 2k-1$. Dann ist $z(G') = f(n,k)-1$, d.h. in G' fehlt genau eine der möglichen Kanten. Wir nehmen zunächst an, daß eine der Kanten zwischen $x_1, \dots, x_{2k-1}$ fehlt - o.B.d.A. etwa die Kante (x_1, x_2) . Dann gilt $O^{(k)}$ wie im Falle (b₁).

Nun fehle in G' o.B.d.A. die Kante (x_{2k-1}, x_j) mit $2k \leq j \leq n$. Wegen $k \geq 2$ und $n-2k+1 \geq k+1 \geq 3$ ist x_0 mit mindestens drei Knotenpunkten von $\nabla^{(m)}$ verbunden - o.B.d.A. mit $x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$. Weiter können wir o.B.d.A. annehmen, daß x_{2k-1} mit x_{2k+2} verbunden ist, d.h. $j \neq 2k+2$. Da von den möglichen Kanten in G' nur die Kante (x_{2k-1}, x_j) fehlt, gilt $O^{(k)}$ in G (Abb. wie in (b₁)!).

(c) Nun sei x_0 mit mindestens einem der Knotenpunkte $x_1, \dots, x_{2k-1}$ und mindestens einem Knotenpunkt von $\nabla^{(m)}$ verbunden.

(c₁) Ist $\text{Grad } x_0 = 2k-2$, so fehlt in G' keine Kante. x_0 liegt also o.B.d.A. im Dreieck (x_0, x_1, x_{2k}) ; die restlichen Knotenpunkte bilden genau $k-1$ unabhängige Dreiecke.

(c₂) Ist Grad $x_0 = 2k-1$, so muß x_0 wegen $k \geq 2$ entweder mit mindestens zwei der Knotenpunkte $x_1, \dots, x_{2k-1}$ oder mit mindestens zwei der Knotenpunkte $x_{2k}, \dots, x_n$ verbunden sein. Da in G' genau eine Kante fehlt, liegt x_0 o.B.d.A. in dem Dreieck (x_0, x_1, x_{2k}) . Die restlichen Knotenpunkte bilden genau $k-1$ unabhängige Dreiecke.

Damit ist der Hilfssatz (I) vollständig bewiesen.

4. Beweis zu Hilfssatz (II)

(II) Ist $G^{(n)}$ ein Fall der Diagonalen $D(m)$ mit $m \geq 2$ oder ein Anfangsfall der Reihen $R(n_k, k)$ mit $k \geq 4$, so gilt Satz 2 bzw. Satz 3, wenn Satz 2 für den links-benachbarten Fall und Satz 2 oder Satz 3 für den diagonal-benachbarten Fall gilt.

Vorbemerkung 1: Ist $G^{(n)}$ ein Fall der Diagonalen, so liegt die Kantenzahl $z(G) = l(n, k) + 1 = \binom{3k-2}{2} + n$ zugrunde.

Für den Anfangsfall der Reihen ist $z(G) = f(n, k) - 1 = (2k-1)(n-k) - 1$.

Vorbemerkung 2: Der links-benachbarte Fall zu $G^{(n)}$ besteht aus allen Graphen $G_{l(n-1, k)+1}^{(n-1)}$. Der links-benachbarte Fall besitzt daher genau einen Knotenpunkt weniger als $G^{(n)}$ und enthält - wie nachstehender Vergleich der Kantenzahlen zeigt - mindestens eine Kante weniger als $G^{(n)}$.

(1) $G^{(n)}$ sei ein Diagonalfall. Dann ist $[l(n, k) + 1] - [l(n-1, k) + 1] = 1$, was sich unmittelbar aus $l(n, k) = \binom{3k-2}{2} + n - 1$ ergibt.

(2) $G^{(n)}$ sei ein Reihenanfangsfall. Dann ist $[f(n, k) - 1] - [l(n-1, k) + 1] \geq 1$ für alle $n = 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ und $k \geq 4$.

Zum Nachweis führen wir eine ähnliche äquivalente Umformung wie in Kap. II/1 (Seite 18) durch:

$$[f(n,k)-1]-[l(n-1,k)+1] \geq 1 \text{ bzw. } f(n,k) \geq l(n,k)+2$$

gilt genau dann, wenn

$$n(2k-2) \geq \frac{1}{2}(3k-2)(3k-3)+k(2k-1)+1 \quad \text{ist.}$$

Diese Ungleichung gilt für $n \geq 3k-1 + \frac{k}{4} + \frac{1}{k-1}$ bzw.

$$n \geq 3k + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil \quad \text{mit } k \geq 4.$$

Beweis des Hilfssatzes

Mit $G^{(n)}$ sei ein beliebiger Fall entweder der Diagonalen oder der Reihenanfängsfälle vorgegeben, wobei die Kantenzahl gemäß Vorbemerkung 1 zugrunde liegt.

Nach dem Satz von CORRÁDI-HAJNAL (Seite 13) kann angenommen werden, daß in $G^{(n)}$ ein Knotenpunkt x_0 vom Grad $\leq 2k-1$ existiert, weil sonst $O^{(k)}$ bereits gilt.

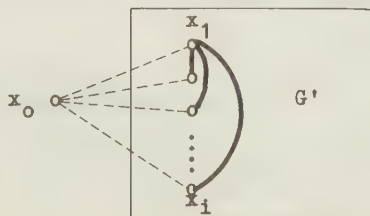
Weiterhin seien alle Knotenpunkte vom Grad ≥ 1 , denn wäre in $G^{(n)}$ ein isolierter Knotenpunkt vorhanden, so muß $O^{(k)}$ gelten, weil $O^{(k)}$ für den links-benachbarten Fall mit geringerer Kantenzahl gilt.

Wir unterscheiden die Fälle: x_0 liegt in keinem Dreieck; x_0 liegt in einem Dreieck.

(a) x_0 liegt in keinem Dreieck.

Sei $\text{Grad } x_0 = i$ mit $1 \leq i \leq 2k-1$. $x_1, \dots, x_i$ seien mit x_0 verbunden. Da x_0 in keinem Dreieck liegt, bilden die Knotenpunkte $x_1, \dots, x_i$ einen kantenlosen Untergraphen $\nabla^{(i)}$.

Anstelle von $G^{(n)}$ betrachten wir folgenden Ersatzgraphen G' : x_0 und alle Kanten (x_0, x_j) mit $j=1, \dots, i$ werden entfernt und stattdessen die Kanten (x_1, x_j) mit $j=2, \dots, i$ eingefügt.¹⁾



¹⁾ nach [6]

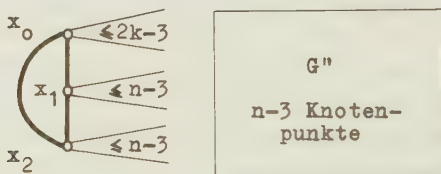
G' besitzt also genau einen Knotenpunkt und genau eine Kante weniger als der Ausgangsgraph. Auf Grund der Vorbemerkung 2 gehört G' daher zum links-benachbarten Fall. Für G' gilt also Satz 2 und damit $O^{(k)}$.

Da höchstens eine der eingefügten Kanten (x_1, x_j) in höchstens einem der unabhängigen Kreise vorkommen kann, ist es möglich, diese Kante gegebenenfalls durch den Weg (x_1, x_0, x_j) zu ersetzen. Also gilt $O^{(k)}$ auch in $G^{(n)}$.

Wir untersuchen nun den Fall, daß x_0 in einem Dreieck liegt.

(b) x_0 liegt in einem Dreieck.

Wir nehmen an, daß x_0 im Dreieck (x_0, x_1, x_2) liegt, und betrachten den Graphen $G'' = G - x_0 - x_1 - x_2$. 1)



G'' besitzt $n-3$ Knotenpunkte und eine Kantenzahl $z(G'')$ mit

$$z(G'') \geq z(G) - (2n+2k-6) .$$

(b₁) $G^{(n)}$ sei der Anfangsfall einer Diagonalen.

Wir zeigen, daß für diesen Fall $O^{(k-1)}$ in G'' gilt.

Nach Vorbemerkung 1 ist $z(G) = l(n, k) + 1$. Da für die Anfangsfälle der Diagonalen $n = 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ mit $k=4m$ ($m \geq 2$) gilt, ist $l(n, k) = f(n, k)$ (wie im Zusatz zu Kap. II/1 (Seite 19) festgestellt wurde). Für die Kantenzahl von G'' gilt daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} z(G'') &\geq f(n, k) + 1 - (2n+2k-6) = (2k-1)(n-k) + 1 - 2n - 2k + 6 \\ &= (2k-3)(n-3-k+1) + 1 \\ &= f(n-3, k-1) + 1 , \end{aligned}$$

d.h.

$$z(G'') \geq f(n-3, k-1) + 1 .$$

1) nach [6]

Der diagonal-benachbarte Fall zum Anfangsfall einer Diagonalen ist der Anfangsfall der Reihe $R(n_{k-1}, k-1)$. Für diesen Fall gilt nach Voraussetzung Satz 3, d.h. jeder Graph $G_{f(n-3, k-1)-1}^{(n-3)}$ besitzt entweder $O^{(k-1)}$ oder $V^{(m)}$. Daraus folgt aber, daß jeder Graph mit der Kantenzahl $f(n-3, k-1)+1$ die Eigenschaft $O^{(k-1)}$ besitzen muß, denn für diese Kantenzahl ist $V^{(m)}$ nicht möglich. G'' ist ein Graph des diagonal-benachbarten Falls und enthält mindestens $f(n-3, k-1)+1$ Kanten, d.h. in G'' muß $O^{(k-1)}$ gelten. Zusammen mit dem Dreieck (x_0, x_1, x_2) gilt dann $O^{(k)}$ in $G^{(n)}$ und damit Satz 2 für diesen Fall.

(b₂) $G^{(n)}$ sei ein Diagonalfall, aber kein Anfangsfall.

Wie in (b₁) weisen wir nach, daß $O^{(k-1)}$ in G'' gilt. Da $z(G) = l(n, k)+1$ ist, ergibt sich für $z(G'')$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} z(G'') &\geq \binom{3k-2}{2} + n - (2n+2k-6) = \binom{3(k-1)-2}{2} + n - 3 + 9k - 9 - 2n - 2k + 6 \\ &= l(n-3, k-1) + 1 + 7k - 2n - 3. \end{aligned}$$

Da ein Diagonalfall vorliegt, ist $n \leq 3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$, d.h.

$$z(G'') \geq l(n-3, k-1) + 1 + 7k - 2\left(3k-1 + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil\right) - 3 = l(n-3, k-1) + 1 + k - 2\left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil - 1.$$

Wegen $k - 2\left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil - 1 \geq 1$ für $k \geq 4$ gilt demnach auf jeden Fall

$$z(G'') \geq l(n-3, k-1) + 1.$$

Der diagonal-benachbarte Fall ist ebenfalls ein Diagonalfall, für den Satz 2 als richtig vorausgesetzt wurde, d.h. ein Graph $G^{(n-3)}$ mit mindestens $l(n-3, k-1)+1$ Kanten besitzt die Eigenschaft $O^{(k-1)}$. G'' erfüllt die Bedingungen des diagonal-benachbarten Falls und besitzt daher $O^{(k-1)}$. Also gilt $O^{(k)}$ in $G^{(n)}$ und damit Satz 2 auch für den Fall (b₂).

(b₃) $G^{(n)}$ sei ein Reihenanfangsfall.

In diesem Fall ist $z(G) = f(n, k)-1$. Für $z(G'')$ erhalten wir daher wie in (b₁) folgende Abschätzung:

$$z(G'') \geq f(n, k) - 1 - (2n+2k-6) = f(n-3, k-1) - 1.$$

Da Satz 3 für den diagonal-benachbarten Fall (wieder ein Reihenfall) als richtig vorausgesetzt wurde, besitzen alle Graphen $G^{(n-3)}$ mit der Kantenanzahl $f(n-3, k-1)-1$ entweder $O^{(k-1)}$ oder $\nabla^{(n-2k)}$. Für G^n ist die Aussage von Satz 3 daher richtig.

Besitzt G^n die Eigenschaft $O^{(k-1)}$, so gilt zusammen mit dem Dreieck (x_0, x_1, x_2) die Eigenschaft $O^{(k)}$ in $G^{(n)}$.

Nun nehmen wir an, daß G^n die Eigenschaft $\nabla^{(n-2k)}$ besitze. Das ist nur möglich, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

Grad $x_0 \geq 2k-2$, Grad $x_1 \geq n-2$, o.B.d.A. Grad $x_2 = n-1$

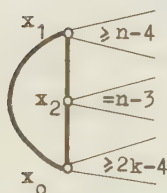
(Grad $x_0 = 2k-2$ und Grad $x_1 = n-2$ sind nicht gleichzeitig möglich).

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, so gilt stets

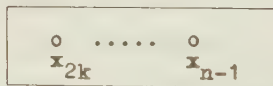
$$z(G^n) \geq f(n, k) - 1 - (2n + 2k - 8) = f(n-3, k-1) + 1 ,$$

d.h. der kantenlose Untergraph könnte nicht existieren.

Wir untersuchen folgenden Graphen:



G^n



höchstens eine der in G^n möglichen Kanten fehlt

$\nabla^{(n-2k)}$

- (1) x_0 sei mit keinem Knotenpunkt von $\nabla^{(n-2k)}$ verbunden.

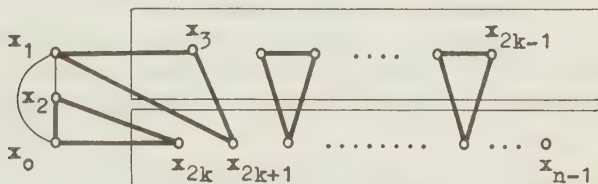
Dann bilden die Knotenpunkte $x_0, x_{2k}, \dots, x_{n-1}$ einen kantenlosen Untergraphen mit $n-2k+1$ Knotenpunkten.

- (2) x_0 sei mit mindestens einem der Knotenpunkte von $\nabla^{(n-2k)}$ verbunden, o.B.d.A. mit x_{2k} .

Da Grad $x_2 = n-1$ ist, muß die Kante (x_2, x_{2k}) existieren, so daß x_0 im Dreieck (x_0, x_2, x_{2k}) liegt.

(2a) Sei Grad $x_0 = 2k-1$. Wir unterscheiden die Fälle Grad $x_1 = n-2$ und Grad $x_1 = n-1$.

(α) Grad $x_1 = n-2$. Dann ist $z(G'') = f(n, k) - 1 - (2n + 2k - 7) = f(n-3, k-1)$, und es fehlt keine der in G'' möglichen Kanten. Da $\bar{V}^{(n-2k)}$ für $k \geq 3$ mindestens k Knotenpunkte enthält, ist x_1 mit mindestens einem der Knotenpunkte $x_{2k+1}, \dots, x_{n-1}$ verbunden. Außerdem ist x_1 mit einem der Knotenpunkte $x_3, \dots, x_{2k-1}$ verbunden. Daher existiert $\Delta^{(k)}$:



(β) Grad $x_1 = n-2$. Dann ist $z(G'') = f(n, k) - 1 - (2n + 2k - 6) = f(n-3, k-1) - 1$, d.h. in G'' fehlt genau eine der möglichen Kanten.

O.B.d.A. fehle die Kante (x_3, x_4) . Dann gilt $\Delta^{(k)}$ wie in (α).

O.B.d.A. fehle die Kante (x_{2k-1}, x_j) mit $2k \leq j \leq n-1$. Da $\bar{V}^{(n-2k)}$ mindestens k Knotenpunkte enthält, ist x_{2k-1} mit mindestens einem Knotenpunkt x_i ($2k+1 \leq i \leq n-1$, $i \neq j$) verbunden. Da außer (x_{2k-1}, x_j) alle möglichen Kanten in G'' existieren, gilt $\Delta^{(k)}$ auch in diesem Falle.

(2b) Sei Grad $x_0 = 2k-2$. Dann gilt Grad $x_2 = n-1$ und $z(G'') = f(n, k) - 1 - (2n + 2k - 7) = f(n-3, k-1)$, d.h. in G'' fehlt keine der möglichen Kanten. $G^{(n)}$ besitzt also $\Delta^{(k)}$ (Abb. wie (α)).

Durch diese Fallunterscheidung wurde gezeigt, daß Satz 3 unter den gegebenen Voraussetzungen auch für den Anfangsfall einer Reihe richtig ist.

Damit ist der Hilfssatz (II) vollständig bewiesen.

Bemerkung: Der Fall (b_3) gilt - wie gezeigt wurde - nicht nur für alle $k \geq 4$, sondern auch für $k=3$.

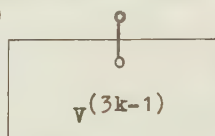
Von dieser Tatsache wird in den weiteren Beweisen noch Gebrauch gemacht.

5. Beweis zu Satz 4

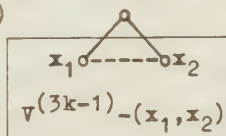
Satz 4:

Jeder Graph $G_z^{(n)}$ mit $z = \binom{3k-2}{2} + n - 1$, $n=3k$ und $k \geq 2$ besitzt entweder $\Delta^{(k)}$ oder $\nabla^{(k+1)}$, oder der Graph ist von folgender Struktur:

(A)



(B)



(ein $\nabla^{(k+1)}$ ist nur für $k=2,3,4$ möglich!)

- Folgerungen:
- (1) Jeder Graph $G_{1(3k,k)+1}^{(3k)}$ mit $k=2,3$ besitzt entweder $\Delta^{(k)}$ oder $\nabla^{(k+1)}$.
 - (2) Jeder Graph $G_{1(3k,k)+1}^{(3k)}$ mit $k \geq 4$ besitzt $\Delta^{(k)}$, d.h. für die Fälle der Diagonalen $D(1)$ gilt $\Delta^{(k)}$.

Beweis durch Induktion nach k:

Vorbemerkung 1: Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} l(6,2) &= f(6,2)-1 & ; & \quad l(9,3) = f(9,3)-1 \\ l(12,4) &= f(12,4) & ; & \quad l(3k,k) > f(3k,k) \text{ für } k \geq 5 \end{aligned}$$

Vorbemerkung 2: Nach dem Satz von CORRÁDI-HAJNAL kann angenommen werden, daß in jedem Graphen ein Knotenpunkt vom Grad $\leq 2k-1$ existiert, weil sonst bereits $\Delta^{(k)}$ gilt. Es gibt keinen Knotenpunkt vom Grad Null, weil sonst $z(G) \leq \binom{3k-1}{2} = \binom{3k-2}{2} + 3k - 2$ wäre.

Besitzt $G_{1(3k,k)}^{(3k)}$ einen Knotenpunkt x_1 mit Grad $x_1 = 1 \geq 1$, der in keinem Dreieck liegt, so ist

$$z(G) \leq \binom{3k}{2} - \binom{1}{2} - (3k-1-1) = \binom{3k-1}{2} - \binom{1-1}{2} + 1.$$

Andererseits gilt jedoch $z(G) = \binom{3k-2}{2} + 3k-1 = \binom{3k-1}{2} + 1$, so daß $i \leq 2$ sein muß. Für $i=1$ liegt ein Graph vom Typ (A) vor, für $i=2$ ein Graph vom Typ (B).

Wir können also im weiteren zusätzlich annehmen, daß jeder Knotenpunkt in einem Dreieck liegt - insbesondere auch der Knotenpunkt vom Grad $\leq 2k-1$.

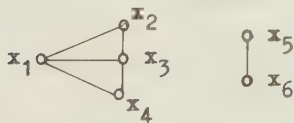
(a) $k = 2$

Wir betrachten einen beliebigen Graphen $G_{11}^{(6)}$ mit einem Knotenpunkt vom Grad ≤ 3 . Jeder Knotenpunkt liegt in einem Dreieck.

Besitzt G einen Knotenpunkt x_1 mit Grad $x_1=2$, und sind x_2 und x_3 mit x_1 verbunden, so existiert das Dreieck (x_1, x_2, x_3) . Die restlichen Knotenpunkte mögen x_4, x_5, x_6 heißen. Fehlt eine der Kanten zwischen diesen Knotenpunkten - o.B.d.A. etwa (x_4, x_5) -, so bilden x_1, x_4, x_5 einen kantenlosen Untergraphen $\nabla^{(3)}$. Fehlt dagegen keine der Kanten, so gilt $\Delta^{(2)}$.

Nun seien alle Knotenpunkte von G vom Grad ≥ 3 . Daraus folgt, daß o.B.d.A. Grad $x_1=3$ angenommen werden kann. x_2, x_3, x_4 seien mit x_1 verbunden. Existiert die Kante (x_5, x_6) nicht, so bilden die Knotenpunkte x_1, x_5, x_6 einen kantenlosen Untergraphen $\nabla^{(3)}$. Ein $\nabla^{(3)}$ ist ebenfalls vorhanden, wenn keine der Kanten zwischen x_2, x_3, x_4 existiert.

Wir nehmen nun an, daß (x_5, x_6) und o.B.d.A. (x_2, x_3) vorhanden sind, und daß $\Delta^{(2)}$ nicht gilt. Dann ist aber x_4 durch höchstens eine Kante mit (x_5, x_6) verbunden, so daß wegen Grad $x_4 \geq 3$ o.B.d.A. auch die Kante (x_4, x_3) existieren muß. Auf Grund der Annahme, daß $\Delta^{(2)}$ nicht



gilt, kann auch x_2 nur durch höchstens eine Kante mit (x_5, x_6) verbunden sein. Ist nun die Kante (x_2, x_4) nicht vorhanden,

so muß $z(G) \leq 3+2+2+2+1 = 10$ sein. Widerspruch!

Ist dagegen die Kante (x_2, x_4) vorhanden, so sind x_2, x_3, x_4

je durch höchstens eine Kante mit (x_5, x_6) verbunden, d.h. es ist $z(G) \leq 3+3+3+1 = 10$. Widerspruch!

Damit ist Satz 4 für $k=2$ bewiesen.

(b) $k \geq 3$

$G_{1(3k,k)}^{(3k)}$ mit $l(3k,k) = \binom{3k-2}{2} + 3k-1 = \binom{3k-1}{2} + 1$ sei ein beliebiger Graph, in dem jeder Knotenpunkt in einem Dreieck liegt. x_0 sei ein Knotenpunkt vom Grad $\leq 2k-1$, der in dem Dreieck (x_0, x_1, x_2) liegt. Wir betrachten den Graphen $G'' = G - x_0 - x_1 - x_2$ mit $3k-3$ Knotenpunkten und der Kantenzahl $z(G'') \geq z(G) - (2n+2k-6) = \binom{3k-1}{2} + 1 - 8k + 6 = \binom{3(k-1)-1}{2} + 1 + k - 3$.

Für $z(G'')$ gilt also die Abschätzung

$$z(G'') \geq l(3k-3, k-1) + k-3 .$$

Demnach ist

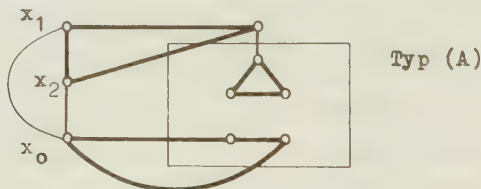
$$(\alpha) \quad z(G'') \geq l(6, 2) \quad \text{für } k=3 ,$$

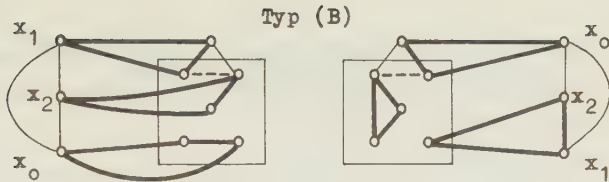
$$(\beta) \quad z(G'') \geq l(3k-3k-1)+1 \quad \text{für } k \geq 4 .$$

(α) $k = 3$. Da Satz 4 für $k=2$ richtig ist, gilt in G'' entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\nabla^{(3)}$, oder G'' ist vom Typ (A) oder (B).

Besitzt G'' die Eigenschaft $\Delta^{(2)}$ oder $\nabla^{(3)}$, so folgt nach (b_3) des Hilfssatzes (II) für G entweder $\Delta^{(3)}$ oder $\nabla^{(4)}$, da (b_3) auch für $k=3$ richtig ist.

Wenn G'' vom Typ (A) oder (B) ist, so muß $z(G'')=11$, Grad $x_0=5$, Grad $x_1=\text{Grad } x_2=8$ sein. Dann gilt $\Delta^{(3)}$ in G , wie folgende drei Graphen zeigen:





Damit ist Satz 4 für $k=3$ bewiesen.

(β) $k=4$. Da Satz 4 für $k=3$ richtig ist, ergibt sich aus der Folgerung (1) zu Satz 4, daß G'' entweder $\Delta^{(3)}$ oder $\bar{V}^{(4)}$ besitzt. Nach Fall (b_3) des Hilfssatzes (II) gilt dann entweder $\Delta^{(4)}$ oder $\bar{V}^{(5)}$ in G , d.h. Satz 4 gilt auch für $k=4$.

$k \geq 5$. Für $k-1 \geq 4$ sei Satz 4 als richtig angenommen, d.h. jeder Graph $G^{(3k-3)}$ mit der Kantenanzahl $1(3k-3, k-1)+1$ besitzt $\Delta^{(k-1)}$. Dann besitzt auch G'' die Eigenschaft $\Delta^{(k-1)}$, so daß $\Delta^{(k)}$ in G gilt.

Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

6. Beweis der Anfangsfälle zu $R(n_2, 2)$ und $R(n_3, 3)$

Jeder Graph $G_{f(n,k)-1}^{(n)}$ mit $n=7, k=2$ und $n=10, k=3$ besitzt entweder $O^{(k)}$ oder $\bar{V}^{(m)}$ mit $m=n-2k+1$.

Beweis:

(a) $n=7, k=2$

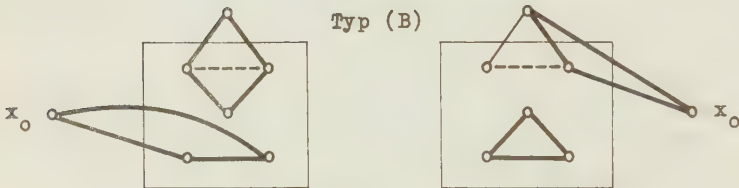
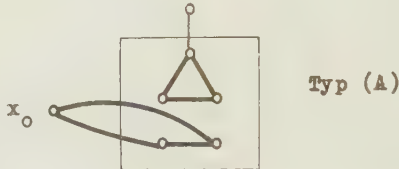
$G_{14}^{(7)}$ sei ein beliebiger Graph mit einem Knotenpunkt x_0 vom Grad $\leq 2k-1=3$. Wir untersuchen $G'=G-x_0$ mit 6 Knotenpunkten und der Kantenanzahl $z(G') \geq z(G) - 3 = 11$.

Nach Satz 4 (Fall $k=2$) gilt also in G' entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\bar{V}^{(3)}$, oder G' ist vom Typ (A) oder (B).

Da Hilfssatz (I) für alle $n \geq 3k$ ausgesprochen wurde, kann $O^{(2)}$ oder $\bar{V}^{(4)}$ für $G_{14}^{(7)}$ gefolgert werden, wenn $\Delta^{(2)}$

oder $\nabla^{(3)}$ in G' gilt.

Nun sei G' vom Typ (A) oder (B). Das ist nur der Fall, wenn $z(G')=11$ und $\text{Grad } x_0=3$ ist. Folgende drei Graphen zeigen, daß dann $O^{(2)}$ in G gilt:



Also gilt in jedem Graphen $G_{14}^{(7)}$ entweder $O^{(2)}$ oder $\nabla^{(4)}$, d.h. Satz 3 ist auch für den Anfangsfall der Reihe $R(n_2, 2)$ richtig.

(b) $n=10, k=3$

Wir betrachten einen beliebigen Graphen $G_{34}^{(10)}$ und zeigen mit Hilfssatz (II), daß $O^{(3)}$ oder $\nabla^{(5)}$ gilt.

Der links-benachbarte Fall besteht aus allen Graphen $G_{33}^{(9)}$, für die nach Satz 4 die Eigenschaft $\Delta^{(3)}$ gilt.

Der diagonal-benachbarte Fall ist der unter (a) bewiesene Fall. Der Beweis von Hilfssatz (II) ist übertragbar, weil insbesondere der Fall (b_3) auch für $k=3$ gilt.

Damit ist Satz 3 auch für den Anfangsfall der Reihe $R(n_3, 3)$ bewiesen.

III. BEWEIS DES SATZES ÜBER DIE EXISTENZ VON ZWEI UNABHÄNGIGEN DREIECKEN

Satz 5:

Jeder Graph $G_z^{(n)}$ mit $n \geq 7$ und $z = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor$ besitzt $\Delta^{(2)}$.

Vorbemerkungen: Für gerades $n \geq 8$ wurde die Richtigkeit des Satzes bereits von ERDÖS nachgewiesen. Für gerades n ist die Kantenzahl $z = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$.

DIRAC beweist folgende Sätze in seiner Arbeit [3]:

- (1) Ist in einem Graphen $G^{(n)}$ mit $n \geq 3k$ und $k \geq 1$ jeder Knotenpunkt vom Grad $\geq \frac{1}{2}(n+k)$, so gilt $\Delta^{(k)}$.
- (2) Sind in einem Graphen $G^{(n)}$ mit $n \geq 6$ mindestens $\frac{1}{2}n+3$ Knotenpunkte vom Grad $\geq \frac{1}{2}(n+1)$ und mindestens zwei Knotenpunkte vom Grad $\geq \frac{1}{2}(n+2)$, so gilt $\Delta^{(2)}$.

Beweis des Satzes:

(a) $n = 7$

$G_{16}^{(7)}$ sei ein beliebiger Graph. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a₁) Ein Knotenpunkt x_0 sei vom Grad ≤ 3 . Dann besitzt der Graph $G' = G - x_0$ genau 6 Knotenpunkte und eine Kantenzahl $z(G') \geq 13$. Nach Satz 4 besitzt jeder Graph $G_{13}^{(6)}$ die Eigenschaft $\Delta^{(2)}$. Also gilt $\Delta^{(2)}$ in G' und damit auch in $G_{16}^{(7)}$.

(a₂) Alle Knotenpunkte seien vom Grad ≥ 4 . Sind dann 6 Knotenpunkte vom Grad $= 4$ und nur ein Knotenpunkt vom Grad ≥ 5 , so ist $z(G) \leq \frac{1}{2}(24+6) = 15$, weil die Kantenzahl nicht größer als die halbe Gradsumme sein kann. Es muß daher mindestens zwei Knotenpunkte vom Grad ≥ 5 geben, so daß die Voraussetzungen des Satzes (2) von DIRAC erfüllt sind. Auch im Falle (a₂) gilt also $\Delta^{(2)}$.

Damit ist Satz 5 für $n=7$ bewiesen.

(b) $n \geq 9$, n ungerade

$G_z^{(n)}$ mit $z = \frac{(n+1)^2}{4}$ sei ein beliebiger Graph. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

(b₁) Ein Knotenpunkt x_0 sei vom Grad $\leq \frac{1}{2}(n+1)$. Der Graph $G' = G - x_0$ besitzt genau $n-1$ (gerade Anzahl) Knotenpunkte und eine Kantenanzahl

$$z(G') \geq z(G) - \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n-1}{2}.$$

Da Satz 5 für gerades $n-1$ richtig ist, besitzt G' also $\Delta^{(2)}$. Daher gilt auch im Ausgangsgraphen $\Delta^{(2)}$.

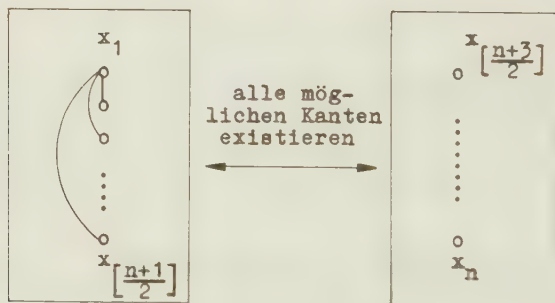
(b₂) Alle Knotenpunkte seien vom Grad $\geq \frac{1}{2}(n+1)+1 = \frac{1}{2}(n+3)$.

In diesem Falle gilt nach Satz (1) von DIRAC sogar $\Delta^{(3)}$.

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Bemerkungen:

1. Für $n=6$ kann Satz 5 nicht gelten, weil jeder Graph $G_{12}^{(6)}$ entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\bar{\nabla}^{(3)}$ besitzt (nach Satz 4).
2. Durch folgenden Graphen wird belegt, daß die Kantenanzahl in Satz 5 minimal ist:



$$\bar{\nabla}(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil) \cup \{(x_1, x_j) / j=2, \dots, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil\} \quad \bar{\nabla}(n - \lceil \frac{n+3}{2} \rceil + 1)$$

Der angeführte Graph besitzt $\lceil \frac{(n+1)^2}{4} \rceil - 1$ Kanten und nicht $\Delta^{(2)}$, weil jedes Dreieck x_1 enthält.

IV. BEWEISE ZUR EXISTENZ VON UNABHÄNGIGEN KREISEN IN PLÄTTBAREN GRAPHEN

Wir zeigen zunächst in einem Lemma, daß die Kantenzahl eines plättbaren Graphen durch die kleinste vorkommende Kreislänge nach oben beschränkt ist.

Lemma:

$G_z^{(n)}$ sei ein plättbarer Graph, in dem die kleinste Kreislänge $i \geq 3$ ist. Dann gilt für die Kantenzahl z

$$z \leq (n-2) \frac{1}{i-2} + 1$$

Beweis:

$G_z^{(n)}$ sei ein Graph, in dem kein Kreis von einer Länge $\leq i-1$ existiert. In einen derartigen Graphen lassen sich möglicherweise weitere Kanten einfügen, so daß dennoch i die kleinste Kreislänge bleibt. Die um diese Kanten vermehrte Kantenzahl sei $z' \geq z$.

Da ein plättbarer Graph vorliegt, kann der Graph isomorph in einer Ebene als Gebilde aus Punkten, Kanten und Flächen dargestellt werden.

Der Graph $G_{z'}^{(n)}$ zerlege die Ebene in f Flächenstücke. Jede Kante liegt in höchstens zwei Flächen, und zu jeder Fläche gehören mindestens i Kanten. Also ist

$$z' \geq \frac{f \cdot i}{2} . \quad (1)$$

Nach der EULERSchen Polyederformel ist $n+f=z'+2$, d.h.

$$f = z' - n + 2 . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich dann:

$$2z' \geq i(z' - n + 2) , \text{ d.h. } z \leq z' \leq (n-2) \frac{1}{i-2} + 1 .$$

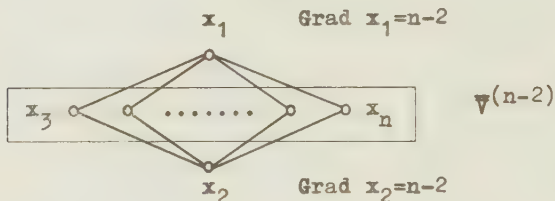
Folgerungen: 1. Jeder plättbare Graph $G^{(n)}$ mit der Kan-

tenzahl $z \geq (n-2) \frac{1}{1-2} + 1$ besitzt einen Kreis der Länge $\leq 1-1$.

Der Fall $i=4$ erlaubt also folgende Aussage:

Jeder plättbare Graph $G_{2n-3}^{(n)}$ mit $n \geq 3$ besitzt $\Delta^{(1)}$.

Folgender Graph besitzt genau $2n-4$ Kanten und kein Dreieck:



2. Für $i=3$ ergibt sich aus dem Lemma, daß $z \leq 3n-6$ ist. Da Schlingen und Zweiecke ausgeschlossen sind, folgern wir:

Jeder plättbare Graph $G^{(n)}$ ohne Schlingen und Zweiecke besitzt höchstens $3n-6$ Kanten.

An Hand eines Gegenbeispiels sehen wir, daß in einem plättbaren Graphen im allgemeinen **keine drei unabhängigen Kreise** existieren.

In den oben abgebildeten Graphen fügen wir die Kanten (x_i, x_{i+1}) für $i=1, 3, 4, \dots, n-1$ ein, so daß der Graph $2n-4 + n-2 = 3n-6$ Kanten enthält. $O^{(3)}$ kann nicht gelten, weil jeder Kreis x_1 oder x_2 enthalten muß.

Im Sinne unserer Problemstellung ist daher für plättbare Graphen nur ein Ergebnis für $O^{(2)}$ möglich!

Satz 6:

Jeder plättbare Graph $G_z^{(n)}$ mit $n \geq 6$ und $z=2n$ besitzt $O^{(2)}$.

Vorbemerkung: DIRAC-ERDÖS beweisen in [2] u.a. folgenden Satz:

Sind in einem plättbaren Graphen $G^{(n)}$ mit $n \geq 6$ mindestens zwei Knotenpunkte vom Grad ≥ 4 und die restlichen Knotenpunkte vom Grad ≥ 3 , so gilt $O^{(2)}$.

Beweis des Satzes:

(a) $n=6$

$G_{12}^{(6)}$ sei ein beliebiger plättbarer Graph. Nach Satz 4 enthält jeder Graph $G_{12}^{(6)}$ entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\nabla^{(3)}$. Besitzt der vorgegebene Graph die Eigenschaft $\nabla^{(3)}$, so hat er die durch Abb. 2 (Seite 5) wiedergegebene Struktur. Dieser Graph ist jedoch nicht plättbar, so daß in jedem plättbaren Graphen $G_{12}^{(6)}$ die Eigenschaft $\Delta^{(2)}$ gilt.

(b) $n \geq 7$

Wir nehmen an, daß Satz 6 für $n-1 \geq 6$ richtig sei. Für jeden Graphen $G_{2n-2}^{(n-1)}$ gelte also die Eigenschaft $O^{(2)}$. Mit $G_{2n}^{(n)}$ sei ein beliebiger plättbarer Graph vorgegeben.

(b₁) Ein Knotenpunkt x_0 sei vom Grad ≤ 2 . Der Graph $G' = G - x_0$ besitzt dann $n-1$ Knotenpunkte und eine Kantenzahl $z(G') \geq 2n-2$. Also gilt $O^{(2)}$ in G' und damit auch in $G_{2n}^{(n)}$.

(b₂) Alle Knotenpunkte seien vom Grad ≥ 3 . Wäre in $G_{2n}^{(n)}$ nur ein Knotenpunkt vom Grad ≥ 4 , so müßte die Kantenzahl $z(G) \leq \frac{1}{2}(3(n-1)+n-1) = 2n-2$ sein. Also gibt es in $G_{2n}^{(n)}$ mindestens zwei Knotenpunkte vom Grad ≥ 4 . Dann sind aber die Voraussetzungen des Satzes von DIRAC-ERDÖS erfüllt, d.h. $O^{(2)}$ gilt auch in diesem Fall.

Damit ist Satz 6 durch Induktion nach n bewiesen.

Bemerkung: Die Kantenzahl in Satz 6 ist minimal. Denn fügen wir in den Graphen, der auf Seite 40 abgebildet ist, die Kanten (x_i, x_{i+1}) mit $i=1,3,4$ ein, so liegt ein Graph mit $2n-1$ Kanten vor, in dem $O^{(2)}$ nicht gilt.

V. BEWEISE ZUR EXISTENZ VON ZWEI UNABHÄNGIGEN
KREISEN IN WEG-KREIS-GRAPHEN

Satz 7:

$G^{(n)}$ sei ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(1, r)$ mit $1 \geq 2$, $r \geq 3$ und $n = 1 + r \geq 6$. Z sei die Kantenanzahl zwischen Weg und Kreis. Dann gilt $O^{(2)}$, wenn

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $Z = \begin{cases} r+3 \\ r+2 \end{cases}$ | für $r=4$ und $1=2$
für $r \geq 5$ und $1=2$ |
| (2) | $Z = r+5$ | für $r=3, 4$ und $3 \leq 1 \leq r+2$ |
| (3) | $Z = r+4$ | für $r=5$ und $3 \leq 1 \leq r+1$ |
| (4) | $Z = r+3$ | für $r \geq 6$ und $3 \leq 1 \leq r$ |
| (5) | $Z = 1+3$ | für $\begin{cases} r=3, 4 \text{ und } 1 \geq r+2 \\ r=5 \text{ und } 1 \geq r+1 \\ r \geq 6 \text{ und } 1 \geq r \end{cases}$ |

Beweis:

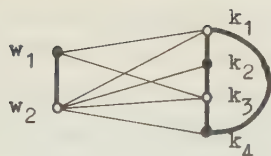
Der Weg der Länge 1 wird im allgemeinen durch $W = (w_1, \dots, w_1)$ beschrieben, der Kreis der Länge r durch $K = (k_1, \dots, k_r)$.

Wir beweisen zunächst gesondert den Teil (1) und den Fall $1=3$, $r=3$ von Teil (2).

(a) $1=2$. $G^{(n)}$ sei ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(2, r)$ mit $n = r+2$, $r \geq 4$ und $Z = \begin{cases} r+3 \text{ für } r=4 \\ r+2 \text{ für } r \geq 5 \end{cases}$.

(a₁) $r=4$. Ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(2, 4)$ mit $Z = r+3 = 7$ enthält 6 Knotenpunkte und genau 12 Kanten. Nach Satz 4 gilt in jedem Graphen $G_{12}^{(6)}$ entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\bar{V}^{(3)}$, also gilt dies auch für den vorgegebenen Graphen.

Nehmen wir an, daß $\bar{V}^{(3)}$ vorhanden ist, so besteht der kantenlose Untergraph aus einem Wegpunkt und zwei nicht benachbarten Kreispunkten. Der Graph hat also folgende Struktur:



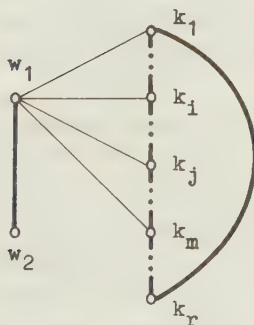
Die durch • gekennzeichneten Knotenpunkte bilden den $\nabla^{(3)}$.

Dieser Graph ist jedoch für $Z=7$ nicht realisierbar, denn es sind höchstens 6 Kanten zwischen Weg und Kreis möglich.

Daher gilt $\Delta^{(2)}$ in jedem Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(2,4)$.

(a₂) $r \geq 5$. w_1 und w_2 seien die Wegpunkte des vorgegebenen Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(2,r)$ mit $Z=r+2$. O.B.d.A. sei w_1 durch mindestens vier Kanten mit dem Kreis K verbunden, denn wäre weder w_1 noch w_2 durch vier Kanten mit K verbunden, so müßte $Z \leq 6$ sein, was wegen $r \geq 5$ nicht der Fall ist.

w_1 sei mit k_1, k_i, k_j und k_m ($1 < i < j < m \leq r$) verbunden.



Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.

Dann ist w_2 mit jedem der Kreisstücke $(k_1, \dots, k_i)$ und $(k_{i+1}, \dots, k_r)$ durch höchstens eine Kante verbunden, d.h. es ist $Z \leq r+2$!

Es liegt ein Widerspruch vor, es sei denn, daß w_1 mit allen Knotenpunkten von K verbunden ist. In diesem Fall existiert jedoch höchstens eine Kante von

w_2 mit K , so daß $Z \leq r+1$ ist. Widerspruch!

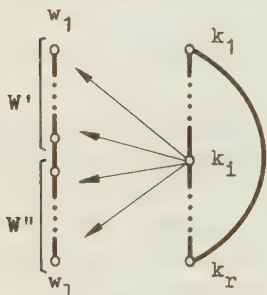
Damit ist Teil (1) von Satz 7 bewiesen.

(b) $l=3, r=3$. $G^{(6)}$ sei ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(3,3)$ mit $Z=r+5=8$. Der vorgegebene Graph besitzt 6 Knotenpunkte und genau 13 Kanten. Nach Satz 4 enthält jeder derartige Graph zwei unabhängige Dreiecke, also auch der vorgegebene Weg-Kreis-Graph.

(c) Wir beweisen Satz 7 nun für die Fälle $r=3$, $l \geq 4$ und $r \geq 4$, $l \geq 3$.

(c₁) Ein Kreispunkt k_i ($1 \leq i \leq r$) sei durch mindestens vier Kanten mit W verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

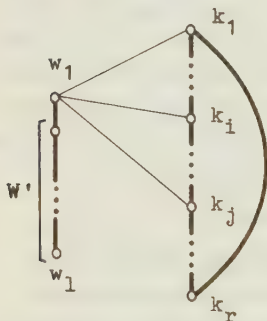
Der Weg W kann in zwei Wegstücke W' und W'' zerlegt werden, so daß k_i mit jedem Wegstück durch mindestens zwei Kanten verbunden ist.



Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.
Dann ist sowohl W' als auch W'' durch höchstens je eine Kante mit $K-k_i$ verbunden, d.h. es gilt $Z \leq l+2!$
Diese Abschätzung steht im Widerspruch zu den in Satz 7 angegebenen Kantenzahlen zwischen Weg und Kreis. Also muß $O^{(2)}$ gelten.

(c₂) Ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - sei durch mindestens drei Kanten mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

w_1 sei mit k_1 , k_i und k_j ($1 < i < j \leq r$) verbunden. Weiter sei $W' = W - w_1$.

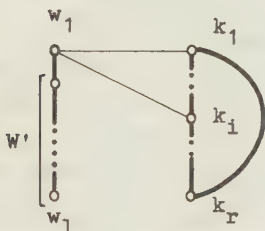


Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.
Dann ist W' mit $(k_1, \dots, k_{i-1})$, k_i und $(k_{i+1}, \dots, k_r)$ durch höchstens je eine Kante verbunden, d.h. es ist $Z \leq r+3!$ Es liegt also ein Widerspruch vor, es sei denn, daß Teil (4) von Satz 7 vorliegt und der Knotenpunkt w_1 mit allen Kreispunkten verbunden ist. Dann ist jedoch W' durch höchstens

eine Kante mit K verbunden, so daß $Z \leq r+1$ ist. Widerspruch! Also gilt $O^{(2)}$.

(c₃) Ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - sei durch genau zwei Kanten mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

w_1 sei nur mit den Knotenpunkten k_1 und k_1 ($1 < i \leq r$) verbunden. Wir setzen wieder $W' = W - w_1$. Auf Grund des Falles (c₁) können wir voraussetzen, daß sowohl k_1 als auch k_1 durch höchstens zwei Kanten mit W' verbunden ist.



Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.

Für $r=3$ ist dann W' durch höchstens eine Kante mit dem dritten Kreispunkt verbunden, so daß $Z \leq 3+3+1=7$ ist. Widerspruch!

Für $r \geq 4$ ist höchstens je eine Kante von W' mit den Kreisstücken $(k_2, \dots, k_{i-1})$ und

$(k_{i+1}, \dots, k_r)$ möglich. Daher ist $Z \leq 3+3+2=8$, Widerspruch!

(c₄) Für $l=3$ und $r \geq 4$ sei ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - durch höchstens eine Kante mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

Wir betrachten einen beliebigen Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(3, r)$. Aus diesem Graphen entfernen wir den Wegpunkt w_1 und erhalten einen Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(2, r)$, bei dem die Kantenzahl zwischen Weg und Kreis um höchstens eine Kante geringer ist. Es ist also:

$$Z \geq \begin{cases} r+5 - 1 = r+4 & \text{für } r=4 \\ r+4 - 1 = r+3 & \text{für } r=5 \\ r+3 - 1 = r+2 & \text{für } r \geq 6 \end{cases} .$$

Nach Teil (a) des Beweises gilt dann $O^{(2)}$.

Damit ist Satz 7 bereits für $l=2$ und $l=3$ vollständig bewiesen. Wir betrachten noch einen weiteren Fall (c₅) und vervollständigen den Beweis von Satz 7 durch Induktion nach der Weglänge l .

(c₅) Jeder Weg-Endpunkt und sein Nachbarpunkt, d.h. w_1, w_2 bzw. w_{1-1}, w_1 , seien mit einem Kreispunkt gemeinsam verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

w_1 und w_2 seien mit k_1 verbunden, w_{1-1} und w_1 mit k_j ($1 \leq i \leq j \leq r$). Ist dann $i=j$, so ist ein Kreispunkt durch mindestens vier Kanten mit W verbunden, d.h. es gilt $O^{(2)}$ nach (c₁). Für $i \neq j$ existieren die beiden unabhängigen Dreiecke (w_1, w_2, k_1) und (w_{1-1}, w_1, k_j) .

(c₆) Es sei eine beliebige Kreislänge $r \geq 3$ vorgegeben. Wir machen die Induktionsannahme, daß Satz 7 für die Weglänge $l \geq 3$ richtig sei, und beweisen, daß dann Satz 7 auch für die Weglänge $l+1$ richtig ist.

Wir betrachten einen beliebigen Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(l+1, r)$. Auf Grund der vorausgegangenen Fälle (c₁), (c₂), (c₃) und (c₅) können wir für den vorgegebenen Graphen folgende Einschränkungen zulassen: jeder Kreispunkt ist durch höchstens drei Kanten mit W und jeder Weg-Endpunkt durch höchstens eine Kante mit K verbunden; ein Weg-Endpunkt und sein Nachbarpunkt - o.B.d.A. w_1 und w_2 - sind nicht gemeinsam mit einem Kreispunkt verbunden.

Für den Weg-Endpunkt w_1 sind dann zwei Fälle möglich. Entweder ist w_1 mit keinem Knotenpunkt von K verbunden, oder aber es existiert genau eine Kante von w_1 mit K - o.B.d.A. die Kante (w_1, k_1) - und der Nachbarpunkt w_2 ist nicht mit k_1 verbunden.

In beiden Fällen entfernen wir w_1 und fügen im zweiten Fall die Kante (w_2, k_1) hinzu. Wir erhalten einen Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl (l, r) mit der gleichen Kantenzahl Z zwischen Weg und Kreis wie bei dem Ausgangsgraphen. Auf Grund der Induktionsannahme gilt dann $O^{(2)}$ in diesem Graphen. Da die hinzugefügte Kante (w_2, k_1) in höchstens einem der unabhängigen Kreise vorkommen kann, wird sie gegebenenfalls durch den Weg (w_2, w_1, k_1) ersetzt, so daß auch in dem vorgegebenen Weg-Kreis-Graphen $O^{(2)}$ gilt.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Wir beweisen nun noch den Satz 8, in dem plättbare Weg-Kreis-Graphen behandelt werden. Wir folgen dabei dem Beweisgang von Satz 7.

Satz 8:

$G^{(n)}$ sei ein plättbarer Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(1, r)$ mit $1 \geq 2$, $r \geq 3$ und $n = 1 + r \geq 6$. Z sei die Kantenanzahl zwischen Weg und Kreis. Dann gilt $O^{(2)}$, wenn

- | | | | | | |
|-----|--|-----|---|-----|-------------------------------|
| (1) | $Z = r + 2$ | für | $r \geq 4$ | und | $l = 2$ |
| (2) | $Z = \begin{cases} r+4 \\ r+3 \end{cases}$ | für | $r = 3$ und $r \geq 4$ | und | $l = 3$ und $3 \leq l \leq r$ |
| (3) | $Z = 1 + 3$ | für | $\begin{cases} r = 3 \\ r \geq 4 \end{cases}$ | und | $l \geq 4$ und $l \geq r$ |

Beweis:

- (a) $l = 2$. $G^{(n)}$ sei ein plättbarer Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(2, r)$ mit $r \geq 4$ und $Z = r + 2$.

Nach Satz 7 gilt dann $O^{(2)}$ bereits für alle $r \geq 5$. Es braucht also nur noch der Fall $r = 4$ untersucht zu werden.

Ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(2, 4)$ mit $Z = r + 2 = 6$ besitzt 6 Knotenpunkte und genau 11 Kanten. Nach Satz 4 enthält jeder Graph $G_{11}^{(6)}$ entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\bar{V}^{(3)}$, oder der Graph ist von der dort angegebenen Struktur (A) oder (B). Die Graphen vom Typ (A) und (B) sind nicht plättbar, weil der vollständige Graph $V^{(5)}$ nicht plättbar ist.

Es liege nun ein Graph mit der Eigenschaft $\bar{V}^{(3)}$ vor. Dann hat der Weg-Kreis-Graph notwendig die im Beweis zu Satz 7/Fall (a₁) angegebene Struktur. Dieser Graph ist ebenfalls nicht plättbar. Also gilt $\Delta^{(2)}$ in jedem plättbaren Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(2, 4)$ mit $Z = 6$.

Damit ist Satz 8 für $l = 2$ nachgewiesen.

- (b) $l=3, r=3$. $G^{(6)}$ sei ein plättbarer Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(3,3)$ mit $Z=r+4=7$.

Ein Weg-Kreis-Graph der Knotenpunktzahl $(3,3)$ mit $Z=7$ besitzt 6 Knotenpunkte und genau 12 Kanten. Nach Satz 4 gilt in jedem Graphen $G_{12}^{(6)}$ entweder $\Delta^{(2)}$ oder $\nabla^{(3)}$, also auch der vorgegebene Graph.

Besitzt der vorgegebene Weg-Kreis-Graph die Eigenschaft $\nabla^{(3)}$, so bilden die beiden Weg-Endpunkte und ein Kreispunkt den kantenlosen Untergraphen. Wegen $Z=7$ liegt dann notwendig folgender Graph vor:



Die Knotenpunkte des $\nabla^{(3)}$ sind durch $\bullet$ gekennzeichnetet.

Da dieser Graph nicht plättbar ist, muß $\Delta^{(2)}$ in jedem plättbaren Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(3,3)$ mit $Z=7$ gelten.

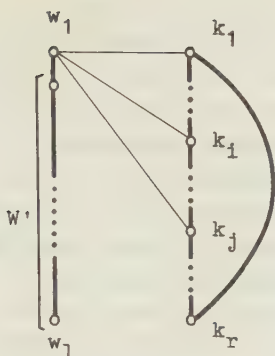
- (c) Wir beweisen Satz 8 nun für die Fälle $r=3, l \geq 4$ und $r \geq 4, l \geq 3$.

- (c₁) Ein Kreispunkt sei durch mindestens vier Kanten mit W verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

Der Beweis dieses Falles kann wörtlich aus Satz 7 übernommen werden.

- (c₂) Ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - sei durch mindestens drei Kanten mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

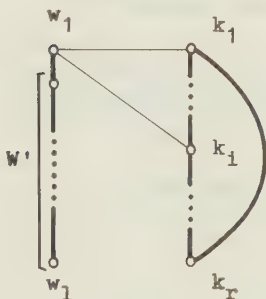
w_1 sei mit k_1, k_i und k_j ($1 < i < j < r$) verbunden. Weiter sei $W' = W - w_1$.



Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.
 Von den beiden Kreisstücken $(k_2, \dots, k_{j-1})$ und $(k_{j+1}, \dots, k_r)$ ist eines nicht mit W' verbunden, weil der Graph sonst nicht plättbar wäre. O.B.d.A. sei $(k_2, \dots, k_{j-1})$ nicht mit W' verbunden. Auf Grund der Annahme, daß $O^{(2)}$ nicht gilt, existiert höchstens je eine Kante von W' mit k_1 und $(k_j, \dots, k_r)$, d.h. es ist $Z \leq r+2$.
 Widerspruch! Also gilt $O^{(2)}$.

(c₃) Ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - sei durch genau zwei Kanten mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

w_1 sei nur mit k_1 und k_i ($1 < i \leq r$) verbunden. Wir setzen $W' = W - w_1$. Wegen (c₁) können wir annehmen, daß k_1 und k_i durch höchstens je zwei Kanten mit W' verbunden sind. Außerdem setzen wir voraus, daß o.B.d.A. keine Kante von W' mit dem Kreisstück $(k_2, \dots, k_{i-1})$ existiert, weil der Graph sonst nicht plättbar wäre.

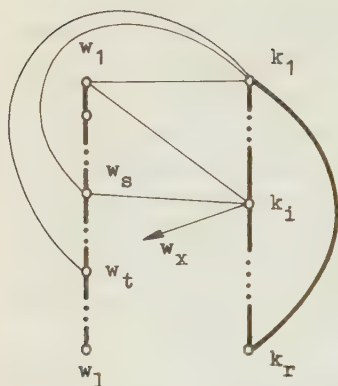


Annahme: $O^{(2)}$ gilt nicht.
 Wir unterscheiden die beiden Fälle (α) und (β).
 (α) O.B.d.A. sei k_1 durch höchstens eine Kante mit W' verbunden.
 Auf Grund der Annahme, daß $O^{(2)}$ nicht gilt, existiert höchstens eine Kante von W' mit dem Kreisstück $(k_{i+1}, \dots, k_r)$,

d.h. es ist $Z \leq 2+3+1=6$. Widerspruch!

(β) k_1 und k_i seien je durch genau zwei Kanten mit W' verbunden.

k_1 sei mit w_s und w_t ($2 \leq s < t \leq l$) von W' verbunden.



Auf Grund der Annahme, daß $O^{(2)}$ nicht gilt, ist k_1 durch keine Kante mit dem Wegstück $(w_2, \dots, w_{s-1})$, durch höchstens eine Kante mit dem Wegstück $(w_{s+1}, \dots, w_l)$ verbunden. Also ist k_1 mit w_s und mit genau einem Knotenpunkt w_x ($s+1 \leq x \leq l$) verbunden. Dann ist aber keine Kante von W' mit dem Kreisstück $(k_{i+1}, \dots, k_r)$ möglich, denn sonst wäre der

Graph entweder nicht plättbar, oder es müßte $O^{(2)}$ gelten. Daher gilt $Z \leq 3+3=6$, Widerspruch!

(c₄) Für $l=3$ und $r \geq 4$ sei ein Weg-Endpunkt - o.B.d.A. w_1 - durch höchstens eine Kante mit K verbunden; dann gilt $O^{(2)}$.

Wir entfernen w_1 und erhalten einen plättbaren Weg-Kreis-Graphen der Knotenpunktzahl $(2, r)$ mit $Z \geq r+3-1 = r+2$. Für diesen Graphen gilt nach (a) bereits $O^{(2)}$.

Damit ist Satz 8 für $l=2$ und $l=3$ nachgewiesen.

Die weiteren Beweisschritte können wörtlich aus Satz 7 übernommen werden, weil sie auch für plättbare Weg-Kreis-Graphen gültig sind.

Damit ist der Beweis zu Satz 8 vollständig.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] K. CORRÁDI - A. HAJNAL: On the maximal number of independent circuits in a graph (Acta Mathematica Acad. Sci. Hung., Band 14, 1963, S. 423 bis 439)
- [2] G. DIRAC - P. ERDÖS: On the maximal number of independent circuits in a graph (Acta Mathematica Acad. Sci. Hung., Band 14, 1963, S. 79 bis 94)
- [3] G.A. DIRAC: On the Maximal Number of Independent Triangles in Graphs (Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg, Band 26, Heft 1/2, 1964, Seite 78 bis 82)
- [4] P. ERDÖS - T. GALLAI: On maximal paths and circuits of graphs (Acta Mathematica Acad. Sci. Hung., Band 10, 1959, Seite 337 bis 356)
- [5] G.A. DIRAC: Paths and circuits in graphs: extreme cases (Acta Mathematica Acad. Sci. Hung., Band 10, 1959, Seite 357 bis 362)
- [6] P. ERDÖS - L. PÓSA: On the maximal number of disjoint circuits of a graph (Seperatum Publicationes Mathematicae Debrecen, 1962, S. 3 bis 7)
- [7] P. TURÁN: On the theorie of graphs (Colloquium Mathematicum, Band 3, 1954)
- [8] G. RINGEL: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin 1959

Herrn Prof. G. Ringel möchte ich an
dieser Stelle danken für die Anregungen und Verbesserungsvorschläge,
die mir beim Entstehen dieser Arbeit
eine Hilfe waren.

L e b e n s l a u f

Am 27.2.1940 wurde ich als zweiter Sohn des Dipl.-Ing. und Gewerbeoberlehrers Friedrich Reinhardt und seiner Ehefrau Adele R., geb. Schmidt, in Berlin geboren. Dem Umzug nach Gelsenkirchen folgte die Evakuierung nach Nettelstedt/Westf. Dort besuchte ich die Volksschule und anschließend die Realschule in Lübbecke/Westf. bis Ostern 1956. In Bielefeld begann ich eine Maschinenbaupraktikantenzeit, die ich jedoch vorzeitig beendete, weil ich Ostern 1957 die Aufnahmeprüfung zur Obersekunda des Friedrich-von-Bodelschwingh Aufbaugymnasiums in Bethel bei Bielefeld bestand. Am 14.3.1960 legte ich dort die Reifeprüfung ab.

Im Sommersemester 1960 nahm ich an der Freien Universität in Berlin das Studium in den Fächern Mathematik, Physik, Philosophie und Erziehungswissenschaft auf. 1962 studierte ich für ein Semester in Heidelberg. Am 24.3.1965 bestand ich die Erste (Wissenschaftliche) Staatsprüfung für das Amt des Studienrats. Meine Hochschullehrer waren in Berlin: Prof. Grotemeyer, Prof. Dinghas, Prof. Ringel, Prof. Stöhr, Dr. Engel, Prof. Wünsche, Prof. Meschkowski, Prof. Pachale in Mathematik, Prof. Lassen, Prof. Honerjäger, Prof. Päsler, Prof. Grawert in Physik, Prof. Kantack, Prof. Weisedel, Prof. Henrich, Dr. Cassierer in Philosophie und Prof. Lennert, Prof. Furck, Prof. Müller, Prof. Aebli, Prof. Borinski in den Erziehungswissenschaften.

Am 2.6.1965 begann meine Ausbildung als Studienreferendar im Studienseminar Spandau von Berlin. Ich schloß den Vorbereitungsdienst am 12.12.1966 mit der Zweiten Staatsprüfung für das Amt des Studienrats ab. Seit dem 1.1.1967 bin ich als Assessor des Lehramts im Bezirk Spandau von Berlin angestellt.

Seit dem 12.10.1964 bin ich mit der Lehrerin Ingrid R., geb. Meinecke, verheiratet.

Berlin, im Jahre 1967

Fritz Reinhardt

